

113 學年度第二學期第二次定期考高三數甲試題

命題範圍：圓錐曲線

一、多重選擇題(共 21 分)

共 3 題，一題 7 分，全對得 7 分，每個選項都是獨立的，只答錯 1 個選項得 4 分，只答錯 2 個選項得 2 分，未作答或答錯 3 個或 3 個以上得 0 分

1. 設拋物線 K 的方程式為 $\frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ ，

下列的敘述哪些是正確的？

(1) 準線方程式為 $x - y + 2 = 0$

(2) 焦點為 $(-1, 1)$

(3) 頂點為 $(0, 0)$

(4) 正焦弦長 $2\sqrt{2}$

(5) 將 K 繞原點旋轉 45° 會形成頂點為 $(0, 0)$ 而開口向右的拋物線。

2. 將橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > b > 0$) 水平伸縮 2 倍，再鉛直伸縮 $\sqrt{3}$ 倍，

得到橢圓 Γ' ，下列的敘述哪些是正確的？

(1) Γ 的長軸長為 a

(2) Γ' 的短軸長為 $2\sqrt{3}b$

(3) 若 P 為 Γ' 上的點，則 P 到 Γ' 上的點兩焦點的距離和為 $2a$

(4) Γ 與 Γ' 的焦點座標可能相同

(5) Γ' 的正焦弦長大於 Γ 的正焦弦長

3. 雙曲線 $\Gamma_1: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 與橢圓 $\Gamma_2: \frac{x^2}{m+20} + \frac{(y+1)^2}{m} = 1$ (其中 m 為正數) 有相同的焦點，而且已知點 $A(2, -1)$ 在雙曲線 Γ_1 上，下列的敘述哪些是正確的？
- (1) $h = 0$ 且 $k = -1$
 - (2) 雙曲線 Γ_1 的實軸為鉛直線段
 - (3) 雙曲線 Γ_1 的實軸長 $= 4$
 - (4) 橢圓 Γ_2 上的點到雙曲線 Γ_1 的兩焦點的距離和為 $2\sqrt{m+20}$
 - (5) 直線 $y = 2x - 1$ 為雙曲線 Γ_1 的一條漸近線

二、填充題（每格 7 分）

1. 橢圓的方程式為 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-8)^2} = 20$ ，試問此橢圓的短軸長 $=$ _____。
2. 雙曲線的兩焦點 $F_1(0, \sqrt{21})$ 、 $F_2(0, -\sqrt{21})$ ，已知此雙曲線正焦弦長為 8，請求出此雙曲線的方程式為_____。(寫成標準式)
3. 設拋物線 Γ 的準線為 $x + 2 = 0$ ， Γ 上有兩點 $A(8, 9)$ 、 $B(\frac{1}{2}, -1)$ ，而且 $\overline{AB}$ 通過焦點 F ，試求拋物線 Γ 的方程式為_____。(寫成標準式)
4. 雙曲線的二頂點 $A_1(5, 3)$ ， $A_2(-3, 3)$ ，一漸近線的斜率為 $\frac{3}{4}$ ，試求此雙曲線的方程式為_____。(寫成標準式)
5. 如右圖所示，開口向右且頂點 $(0, 0)$ 的拋物線 Γ ， Γ 的焦點為 F ，已知直線 PQ 過 F 並且交 Γ 於 P 、 Q 兩點，已知 $\overline{PF} = 4$ 且 $\overline{QF} = 3$ ，試求直線 PQ 的方程式為_____。
6. 圓 C 的半徑為 6，圓心 O 的坐標為 $(-2, 0)$ ，點 A 的坐標為 $(6, 0)$ ，當動點 Q 在圓 C 上移動時， P 為 $\overline{AQ}$ 的中垂線與直線 OQ 的交點，試求動點 P 的軌跡方程式為_____。(寫成標準式)

7. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > 0, b > 0$) 的兩焦點為 F_1, F_2 ，其上一點 P 滿足 $\overline{PF_1} = 4, \overline{PF_2} = 16, \angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，試求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、計算題（第一題 12 分，第二題 20 分，共 30 分）

1. 雙曲線 H 的標準式為 $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$ ， F_1 與 F_2 為其焦點，試求下列各小題：
- (1) 設 P 點為 H 上的動點，試求 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$ 的值。(2 分)
 - (2) 寫出雙曲線 H 的兩個焦點的坐標。(4 分)
 - (3) 寫出雙曲線 H 的兩條漸近線方程式。(6 分)
2. 已知中心為原點，長軸在 y 軸上的橢圓 E 繞原點旋轉 θ ($0 < \theta < \pi$) 得到橢圓 E' ，橢圓 E' 的方程式為 $5x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2 = 36$ ，且橢圓 E 的一個焦點旋轉到點 $(-\sqrt{2}, 2)$ ，試回答下列問題：
- (1) 試求橢圓 E' 長軸所在直線的方程式。(4 分)
 - (2) 試求橢圓 E' 的短軸頂點。(6 分)
 - (3) 試寫出旋轉矩陣與橢圓 E 的標準式。(8 分)