

台中市台中女中 113 上高一期末考

一、多選題（占 40 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 10 分。（每個選項 2 分）

1. 設 $f(x) = 54x^3 - 117x^2 + 96x - 33$ ，欲將 $f(x)$ 表示成 $a\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + b\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + c\left(x - \frac{2}{3}\right) + d$ 之形式，

小綠 請來算除法萬無一失的除法達人 幫她做綜合除法，計算式如下，試問下列敘述何者正確？

$$\begin{array}{rrrr} 54 & -117 & 96 & -33 \\ & 36 & -54 & 28 & \frac{2}{3} \\ \hline 54 & -81 & 42 & -5 \\ & & 36 & -30 \\ \hline 54 & -45 & 12 & \\ & & 36 & \\ \hline 54 & -9 & & \end{array}$$

(1) 序組 $(a, b, c, d) = (-5, 12, -9, 54)$

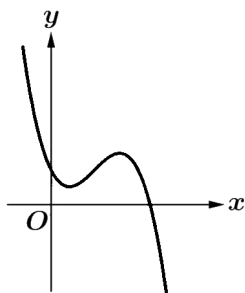
(2) 若進一步將 $f(x)$ 表示成 $p(3x - 2)^3 + q(3x - 2)^2 + r(3x - 2) + s$ 之形式，則序組 $(p, q, r, s) = (2, -1, 4, -5)$

(3) $f(x)$ 除以 $(3x - 2)^2$ 的餘式與 $f(x)$ 除以 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$ 的餘式同為 $12x - 13$

(4) $y = f(x)$ 的圖形其廣域特徵為 $y = 54x^3$ ；而在 $x = \frac{2}{3}$ 附近的局部特徵，其近似的一次函數為 $y = 12x - 13$

(5) 若取 $f(0.666)$ 的近似值（四捨五入）到小數點以下第三位，則 $f(0.666) \approx -5.008$

2. 三次函數 $y = f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ ，如圖所示，試問下列選項哪些是正確的？



- (1) $a < 0$
- (2) $p > 0$
- (3) $h < 0$
- (4) $k > 0$
- (5) $-ah^3 - ph + k > 0$

3. 試問下列各選項，何者與不等式 $(x-2)(x-5) < 0$ 有相同的解？

- (1) $(2-x)(5-x)(-x^2+2x-7) > 0$
- (2) $(x-2)(x-3)^2(x-5) < 0$
- (3) $(x-2)^7(5-x)^{11} > 0$
- (4) $\frac{(x-2)(x-5)}{x^2+x+1} < 0$
- (5) $\frac{x^2+x+1}{(x-2)(x-5)} \leq 0$

4. 關於二次函數，下列敘述何者正確？

- (1) 將 $y = 3x^2 - 2x$ 的圖形向右平移 1 單位，在向上平移 2 單位後得到的圖形方程式為 $y + 2 = 3(x+1)^2 - 2(x+1)$
- (2) 設 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ，則 $f(x - \sqrt{2})$ 的最小值為 -4
- (3) 設 $f(x) = x^2 - 8x + k$ ，其中 k 為實數，若 $f(x)$ 在 $m \leq x \leq n$ 中有 2 個 x 值都能使 $f(x)$ 得到最大值，則 $m + n = 8$
- (4) 已知二次函數 $f(x)$ 滿足 $f(2-t) = f(2+t)$ ，其中 t 為任意實數，若 $f(0) < 0$ ， $f(1) > 0$ ，則 $f(5) < 0$
- (5) 若二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 圖形的對稱軸為 $x = 3$ ，則三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的對稱中心之 x 坐標為 2

二、填充題（占 60 分）

說明：第 5 題至第 19 題，每題 4 分。

5. 若 $(x - 2025)^2 + 3(x - 2025) + 5 = a(x - 2024)(x - 2025) + b(x - 2024) + c$ ，則序組 $(a, b, c) =$ 【 】。

6. 若 $(x^8 - 4x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 3)(2x^7 + x^5 - 3x^3 + 4x + 1) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{14}x^{14} + a_{15}x^{15}$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{14} =$ 【 】。（提醒：沒有 a_0 和 a_{15} ）

7. 若 $f(x) = (x + 113)^3 - 2(x + 113)^2 - 3(x + 113) + 1$ ，
則 $f(x)$ 除以 $x + 114$ 之餘式為【 】。

8. 若 $1 \times 11^5 - 10 \times 11^4 - 12 \times 11^3 + 13 \times 11^2 - 21 \times 11 + k = 13$ ，則 $k =$ 【 】。

9. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x - 3$ 的餘式為 5，且 $f(x)$ 除以 $x - 2$ 的餘式為 3，則 $f(x)$ 除以 $x^2 - 5x + 6$ 的餘式為【 】。

10. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 2x + 4$ 的餘式為 $3x - 5$ ，且 $f(x)$ 除以 $x + 2$ 的餘式為 13，則 $f(x)$ 除以 $x^3 + 8$ 的餘式為【 】。

11. 已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $f(2) = 6$ ， $f(4) = 0$ ，則 $\frac{f(\pi) - f(3)}{\pi - 3} =$ 【 】。

12. 二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中 $-2 \leq x \leq 3$ ，若在 $x = 1$ 時有最小值 -20 ，且圖形與 y 軸交於 $(0, -18)$ ，則此函數之最大值為【 】。

13. 已知一次函數 $y = m(x - 2) + 3$ 和三次函數 $y = a(x - 2)^3 + p(x - 2) + 3$ 的圖形共有三個交點 $P(1, 9)$ 、 $Q(2, 3)$ 和 R ，則 R 點的坐標為【 】。

14. 設三次函數 $f(x)$ 的對稱中心為 $(1, 5)$ ，且 $f(x)$ 通過點 $(2, 11)$ 、 $(-1, -1)$ ，則 $f(4) =$ 【 】。

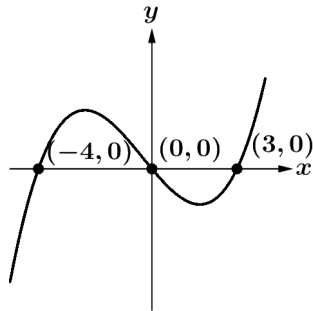
15. 三次函數 $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 17x + 3$ ，則 $f(x)$ 圖形的對稱中心為【 】。

16. 設 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ 的廣域特徵近似於 $y = -2x$ ，且在 $x = -1$ 附近的局部特徵近似於 $y = -3x$ ，則序組 $(a, b, c) =$ 【 】。

17. 對於任意實數 x ，若 $y = 2x - 5m$ 的圖形恆在拋物線 $y = (m - 1)x^2 + 4mx - 1$ 之下方，則實數 m 的範圍為【 】。

18. 不等式 $(-x^2 - 3x + 4)(2x^2 - x - 2)(x^2 + x + 1) > 0$ 共有【 】個整數解。

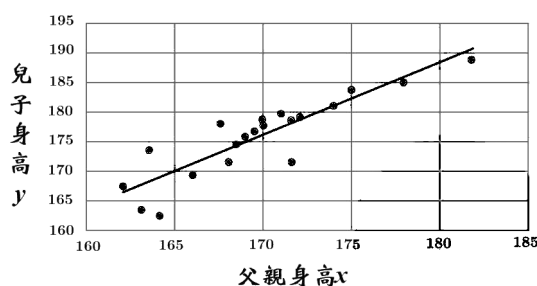
19. 已知三次函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的圖形如圖所示，則滿足 $f(2x - 1) < 0$ 的最大整數解為【 】。



三、加分題（占 10 分）

說明：第 20 題至第 23 題，每格 3 分。（最多 10 分）

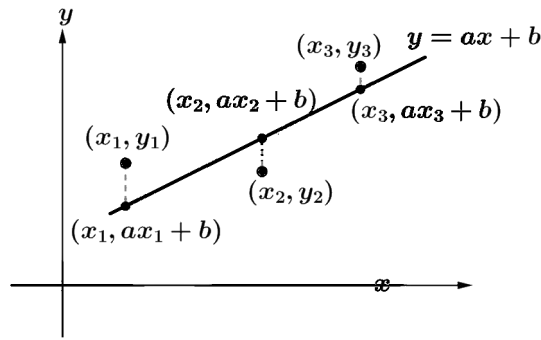
無論在自然科學領域抑或社會科學領域，我們經常會探討兩個變量間的關係。為能客觀的解釋所見現象，進而呈現具有說服力的研究成果，此時統計學是一項不可或缺的科學方法。舉例而言：欲探討父親身高 x 與孩子身高 y 之相關性，首先我們可以在研究母群體中隨機抽樣 n 對父子的身高數據（ n 足夠多），並記錄成 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的數據型態。接著我們可將這 n 筆數據標示在坐標平面上，如此便能初步呈現出兩變量間大致的趨勢。以右圖的樣貌來說，整體大致呈現出正相關趨勢，且適合用一條直線 $y = ax + b$ 再加上一個隨機誤差 e 來描述兩變量 x, y 的關係，當給定一個 x 值下，便可依此關係作為預測 y 值的依據。



現在小綠要來挑戰一個課題：

「如何找到一條最適合描述這筆數據資料的直線： $y = ax + b$ （斜率 a 及 y 截距 b 如何決定？）」

以下我們以 3 筆數據： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ （即 $n = 3$ ）來推論，（ n 筆同理可證）。



如上圖，假設小綠以 $y = ax + b$ 作為「給定 x 值下，預測 y 值」的依據，可定義預測誤差

$e_1 = y_1 - (ax_1 + b)$, $e_2 = y_2 - (ax_2 + b)$, $e_3 = y_3 - (ax_3 + b)$ ，即「誤差 = 實際資料的 y 值 - 預測的 y 值」

在此先建立一個決定斜率 a 及 y 截距 b 的準則：

「能讓這 3 筆誤差的平方，其總和達到最小值的 a 及 b ，就是我的最佳選擇」

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + (y_3 - ax_3 - b)^2$$

$$= (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)a^2 + 3b^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)a + 2(x_1 + x_2 + x_3)ab - 2(y_1 + y_2 + y_3)b \quad (*)$$

小綠利用乘法展開公式整理至此後，眼前看到的式子讓她腦海出現了：「放棄吧～」的聲音。正方準備起身離開之際，她觀察到這個式子其實就是個由 a 和 b 構成的二次式，什麼樣的 a 和 b 代入二次式可達最小值，似乎可用課堂所學過的配方法處理

，於是小綠請來配方魔人指導她如何對這個式子進行配方。首先，魔人介紹兩個好用的符號(如下)幫小綠把(*)式做了簡化：

(1) 設 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ (即 x 的平均數)，則 $x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x}$ ，同理 $y_1 + y_2 + y_3 = 3\bar{y}$

(2) 設 $S_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 3\bar{x} \cdot \bar{y}$ ，則 $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = S_{xy} + 3\bar{x} \cdot \bar{y}$ ，

同理 $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_{xx} + 3\bar{x}^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = S_{yy} + 3\bar{y}^2 \end{cases}$

此時(*)式被簡化成：

$$(S_{yy} + 3\bar{y}^2) + (S_{xx} + 3\bar{x}^2)a^2 + 3b^2 - 2(S_{xy} + 3\bar{x} \cdot \bar{y})a + 6\bar{x}ab - 6\bar{y}b$$

(魔：接著將 a 暫時看成常數，降冪排成 b 的二次多項式)

$$= 3b^2 - 6(\bar{y} - a\bar{x})b + S_{xx}a^2 - 2S_{xy}a + S_{yy} + 3\bar{x}^2a^2 - 6\bar{x} \cdot \bar{y}a + 3\bar{y}^2$$

(魔：接著首二項的 3 倍提出，末三項的 3 倍題出)

$$= 3[b^2 - 2(\bar{y} - a\bar{x})b] + S_{xx}a^2 - 2S_{xy}a + S_{yy} + 3(a^2\bar{x}^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{y}a + \bar{y}^2)$$

(魔：接著對變數 b 進行配方，末三項順便整理)

$$= 3[b^2 - [(21)]^2 - 3(\bar{y} - a\bar{x})^2 + S_{xx}a^2 - 2S_{xy}a + S_{yy} + 3(\bar{y} - a\bar{x})^2]$$

(魔：接著消去整理)

$$= 3[b^2 - [(21)]^2 + S_{xx}a^2 - 2S_{xy}a + S_{yy}]$$

(魔：接著對變數 a 進行配方)

$$= 3[b^2 - [\quad (21) \quad]^2 + S_{xx}(a - [\quad (20) \quad])^2 + S_{yy}(1 - [\quad (22) \quad])$$

(魔：恭喜小綠!!!)

配方魔人 離開前順便告訴小綠，符號 S_{xx} ， S_{yy} 可以被證明必然為正數，因此透過小綠配方處理後的結果(如上式)，我們已可看出：當 $a = [\quad (20) \quad]$ ，且 $b = [\quad (21) \quad]$ 時，能使 $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ 達到最小值，亦即最適合描述這筆數據資料的直線為

$$y = [\quad (20) \quad]x + [\quad (21) \quad]$$

(若將這條直線整理成 $y - k = [\quad (20) \quad](x - h)$ ，

則可看出此線斜率為且必過 $(h, k) = [\quad (23) \quad]$)

參考答案

1. 2345 2. 1245 3. 1345 4. 2345

5. (1, 2, 3)

6. 0

7. 1

8. 2

9. $2x - 1$

10. $2x^2 - x + 3$

11. -3

12. -2

13. (3, -3)

14. -1

15. (-2, 1)

16. (-2, -3, -3)

17. $m > 2$

18. 3

19. 1

20. $\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$

21. $\bar{y} - a\bar{x} = \left(\text{或} \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x} \right)$

22. $\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}S_{yy}}$

23. (x, y)