

市立臺中一中 113 學年度第一學期 期末考 高三數學甲 試題 科目代碼 03
請於答案卡上正確劃記班級、座號、科目代碼，若未劃記或劃記錯誤，扣 10 分。

一、單選題：共 18 分。

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。。

1. 請問滿足絕對值不等式 $|4x - 24| \leq 2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？ (1)6 (2)8 (3)10
(4)12 (5)14
2. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 200 元；若出現一正一反可得獎金 400 元；若出現兩個正面可得獎金 600 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）。試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？ (1)300 元 (2)400 元 (3)500 元 (4)600 元 (5)700 元
3. 坐標平面上以 Ω 表示函數 $f(x) = x^2$ 與 $g(x) = x^3$ 圖形所圍區域，則下列何者為 Ω 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積
(1) $\int_0^1 \pi(x^2)^2 dx$ (2) $\int_0^1 \pi(x^3)^2 dx$ (3) $\int_0^1 \pi(x^2 - x^3)^2 dx$ (4) $\int_0^1 \pi(x^4 - x^6) dx$ (5) $\int_0^1 \pi(x^6 - x^4) dx$ 。

二、多選題：共 40 分。

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡上。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯 3 個選項者，得 2 分；答錯多於 3 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設二次函數 $f(x) = x^2 + bx + c$ ，其中 b, c 為實數。已知 $f(x+1) = f(-x+1)$ 對任意實數 x 均成立，且當 $-1 \leq x \leq 7$ 時， $f(x)$ 的最大值會是最小值的 10 倍，若 $f(x)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則下列敘述何者正確？
(1) $b = 2$ (2) $c = 5$ (3) $f(113) > f(-110)$ (4) $M + m = 55$ (5) $f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的一次近似為 $y = 4$
5. 坐標平面上有一以原點 O 為圓心的圓 C ，交直線 $x - y + 2 = 0$ 於 Q, R 兩點。已知圓 C 上有一點 P 使得 $\triangle PQR$ 為一正三角形。請選出正確的選項。
(1) $\overline{QR} = 2\sqrt{3}$ (2) P 點在第四象限 (3) $\overline{QR}$ 的中點坐標為 $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ (4) 圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 = 8$ (5) 直線 $x - y - 4 = 0$ 為圓 C 在 P 點的切線

6. 設 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)，請選出正確的選項。

(1) 若 $0 < a < 1$ 時，則 $f(\pi^3) < f(\pi^4)$

(2) 若 $a > 1$ 時，則 $f(\frac{\pi^3 + \pi^4}{2}) < f(\pi^3) < f(\pi^4)$

(3) 若 $0 < a < 1$ ，則 $f(\frac{\pi^3 + \pi^4}{2}) > \frac{1}{2}[f(\pi^3) + f(\pi^4)]$

(4) 若 $a > 1$ ，則 $f(\frac{\pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4}{4}) > \frac{1}{4}[f(\pi) + f(\pi^2) + f(\pi^3) + f(\pi^4)]$

(5) 若 $a > 1$ ，且三正數 x_1, x_2, x_3 為等比數列，則 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ 必為等差數列。

7. 給定向量 $\vec{a} = (1, -2, 2)$ ，請選出正確的選項。

(1) 可以找到非零向量 $\vec{b}$ 使得 $\vec{a} \times \vec{b} = (2, 2, 1)$

(2) 可以找到非零向量 $\vec{b}$ 使得 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$

(3) 若非零向量 $\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3|\vec{b}|$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3|\vec{b}|$

(4) 若非零向量 $\vec{b}$ 滿足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，則 $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3|\vec{b}|$

(5) 若非零向量 $\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ，則 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夾角恰好為 45°

8. 令 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ，請選出正確的選項。

(1) 鉛直線 $x = \frac{\pi}{4}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸

(2) 若鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 均為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a) = f(b)$

(3) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x) = \sqrt{2}$

(4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和大於 2π

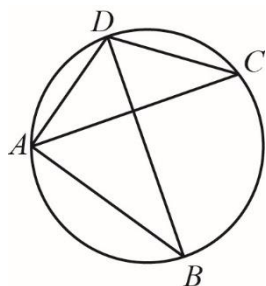
(5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 4\sin^2 \frac{x}{2}$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到

三、填充題：共 7 題，每題 6 分，共 42 分

9. 若有 6 個正整數 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 排成一個數列，其中 $a_1 = 1$ ， $a_6 = 2$ 且都滿足 $|a_{k+1} - a_k| = 1$ ， $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 。則共有 9 個符合條件的不同數列。

10. 設 A, B, C, D 為圓上的相異四點。已知圓的半徑為 6， $\overline{AB} = 10$ ，兩線段 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，

如圖所示（此為示意圖，非依實際比例）。則 $\overline{CD}$ 的長度為 ⑩ $\sqrt{\text{⑪} \text{⑫}}$ 。（化成最簡根式）

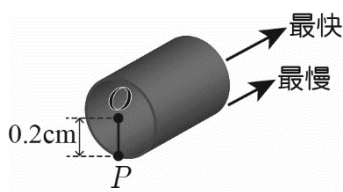


11. 已知 A 為 2 階方陣，且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若實數 a, b 滿足 $A^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ，試求數對 $(a, b) = \text{⑬, ⑭}$ 。

12. 已知 P 點位於由 x 軸， y 軸與 $4x + 3y = 20$ 等三直線所成的區域內部(不含邊界)，若 $\overline{OP} = \sqrt{5}$ （ O 為原點），則 P 點到此三直線距離和的最大值為 ⑮。

13. 令 $E: x + z = 2$ 為坐標空間中過三點 $A(2, -1, 0)$ 、 $B(0, 1, 2)$ 、 $C(-2, 1, 4)$ 的平面。另有一點 P 在 xy 平面上且其於 E 之投影點與 A 、 B 、 C 三點等距離，則點 P 與平面 E 的距離為 ⑯ $\sqrt{\text{⑰}}$ （化為最簡根式）。

14. 血液在動脈中流動時流速並不相同：在血管中心區域的流動速度要比靠近血管壁附近的流動速度快。事實上，血液在距離血管中心 x 處的流動速度 v 為 x 的函數。如圖所示，



已知當血管半徑為 0.2 公分時，速度函數為 $v(x) = 30 - 900x^2$ （公分／秒），其中 x 的單位為公分，試求血液在此動脈某一半徑 $\overline{OP}$ 內的平均流動速度為 ⑱⑲。

15. 求兩函數 $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ 與 $g(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 7$ 的圖形所圍封閉區域的面積為 $\frac{\text{⑳}}{\text{㉑}}$ 。

試題結束

參考答案：

一、單選題：

1.(2) 2.(3) 3.(4)

二、多選題

4.(2)(3)(5) 5.(2)(4)(5) 6.(4)(5) 7.(1)(2)(4)(5) 8.(4)(5)

三、填充題

9. 5 10. $2\sqrt{11}$ 11. (1,5) 12. 5 13. $3\sqrt{2}$ 14. 18 15. $\frac{1}{2}$