

市立臺中一中 113 學年度第一學期第二次期中考 高三數學(甲組)試題 科目代碼：03
請於答案卡上正確劃記班級、座號、科目代碼，若未劃記或劃記錯誤，扣 10 分。

一、單選題：共 8 分。

說明：第 1 題至第 1 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得 8 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。。

1. 若將區間 $[0,9]$ 分成 9 等分後形成一個分割，則函數 $f(x) = -x^2 + 9x$ 對此分割的上和可以表示為下列哪個選項？

- (1) $\sum_{k=0}^8 f(k)$ (2) $\sum_{k=1}^9 f(k)$ (3) $\sum_{k=0}^8 f(k + \frac{1}{2})$
(4) $\sum_{k=1}^8 f(k) + f(\frac{9}{2})$ (5) $\sum_{k=2}^9 f(k) + f(\frac{9}{2})$

二、多選題：共 24 分。

說明：第 2 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡上。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

2. 若 $y=f(x)$ 是定義域為所有實數的連續函數。已知 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有極小值 m ，在 $x=4$ 有極大值 n 。

試選出正確的選項。

- (1) $m \leq n$ (2) $f'(1)=0$ (3) $f''(1)>0$ (4) n 可能是 $y=f(x)$ 的最大值
(5) 存在實數 k ，滿足 $f(4+k) \leq n$

3. 若 k 為實數， $y=f(x)=3x^4+2kx^3+8x^2-5x+7$ 沒有反曲點，則 k 值可以為下列哪些選項？

- (1) $-3\sqrt{2}$ (2) -4 (3) 尤拉數 e (4) 圓周率 π (5) $\log_2 21$

4. 已知 $f(x)$ 為非零多項式，令 $F(x) = \int_1^x f(x)dx - \int_1^{x^2} f(x)dx$ ，試選出正確的選項。

- (1) $F(x) = \int_x^{x^2} f(x)dx$ (2) $F(x)$ 必可以被 x^2-x 整除 (3) $F(x)$ 的次數必為偶數
(4) $F'(0)=0$ (5) $F'(1)=f(1)$

5. 若 $a、b、c、d$ 為實數， $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ， $a>0$ ，滿足 $f(3)=f''(3)=0$ 。試選出正確的選項。

- (1) $b=-9a$ (2) $c=27a$ (3) $y=f(x)$ 為遞增函數 (4) $f(4)$ 可能為負數 (5) $f'(4)>0$

三、填充題：共 7 題，每題 8 分，共 56 分。

A. 若 $f(x)=x^5+2x^4-x^3+3x-15$ ， $g(x)=x^5-2x^4-10x^2+7$ ，則 $2(f(g(-3)))'+f'(g(3))=$ ⑥。

B. 已知 $y=f(x)$ 為中心(2,5)的三次多項式函數，在 $x=3$ 時有極大值 11，則 $f(4)=$ ⑦⑧。

C. 若 $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^4$, $f'(2x) = \sum_{k=0}^8 a_k x^k$, 則 $a_7 =$ ⑨⑩⑪⑫。

D. 設函數 $f(x) = x^2(4-x)(1+x)$, 若 $c > 0$, 則當 $c =$ ⑬ 時定積分 $\int_{-c}^c f(x) dx$ 有最大值為 ⑭⑮⑯ ⑰⑱。(化成最簡分數)

E. 已知點 $A(m, n)$ 在 $y = \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ 的圖形上, 以 A 點為切點的切線和直線 $2x + y = 7$ 平行, A 點在第一象限, 則 $m - n =$ ⑲⑳。

F. 求定積分 $\int_{-1}^3 (2024(x-1)^{2023} + \sqrt{(3+x)(5-x)}) dx =$ ㉑ $\sqrt{\text{㉒}}$ $+$ $\frac{\text{㉓}}{\text{㉔}} \pi$ 。(化成最簡根式及分數)

G. 若 a, b, c, d 為實數, 多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 的一次近似分別為 $y=5x+7$ 與 $y=4x+d$, 則 $f(4) =$ ㉕㉖。

四、填充題：共 3 題，每題 4 分，共 12 分。

H. 已知 $y = x^3 + ax^2 + bx$ 的圖形與 x 軸相切於 $(c, 0)$, 若 c 為正整數, 且 $y = x^3 + ax^2 + bx$ 的圖形與 x 軸圍成的封閉區域面積亦為正整數 N 。求滿足上述條件 N 的最小值為 ㉗㉘㉙。

I. 求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left(\left| \frac{4 \cdot 1^2}{n^2} - 1 \right| + \left| \frac{4 \cdot 2^2}{n^2} - 1 \right| + \left| \frac{4 \cdot 3^2}{n^2} - 1 \right| + \cdots + \left| \frac{4n^2}{n^2} - 1 \right| \right) =$ ㉚。

J. 若 $f(x) = (x^2 - 12x + 21)^{20}$, $S = \frac{f'(2)}{1!} \times 9^2 + \frac{f''(2)}{2!} \times 9^3 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!} \times 9^4 + \cdots + \frac{f^{(40)}(2)}{40!} \times 9^{41}$ 。已知 S 為 n 位數的正整數, 其首位數字為 a , 個位數字為 b , 則數對 $(n, a, b) =$ ㉛㉜, ㉝, ㉞。

參考答案

一、單選題：

1.(4)

一、多選題：

2.(4)(5) 3.(2)(3)(4) 4.(2)(3) 5.(1)(4)

二、填充題：

A. 7 B. -1 C. 1024 D. $2 ; \frac{128}{15}$ E. -3 F. $4\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi$ G. 36

三、填充題：

H. 108 I. 2 J. (21,8,1)