

彰化縣彰化女中 113 上高一期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 91 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 6 分。

1. 設在坐標平面上的三條直線 L_1, L_2, L_3 斜率分別為 m_1, m_2, m_3 ，若 L_1 通過兩點 $(4, 1), (1, 3)$ ， L_2 平行直線 $x + 2y - 3 = 0$ ， L_3 垂直直線 $4x - 7y - 13 = 0$ ，則下列選項何者正確？

(1) $m_1 > m_2 > m_3$

(2) $m_2 > m_1 > m_3$

(3) $m_1 > m_3 > m_2$

(4) $m_3 > m_2 > m_1$

2. 設有一菱形的三頂點為 $A(0, 0), B(4, 7), C(7, 4)$ ，另有一直線 $L: y - \frac{3}{2} = m(2x - 3)$ 將此菱形分成面積相等的兩塊，則 m 值為下列何者？

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{2}$

(4) 1

3. 試求圓 $C: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$ 關於直線 $L: x - y = 0$ 的對稱圓方程式為下列何者？

(1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

(2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

(3) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

(4) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$

4. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 6x + 2y + k = 0$ 為一圓，若直線 $L: x - 2y - 2 = 0$ 和此圓不相交，則實數 k 的值可能為下列何者？

- (1) 10
- (2) 9
- (3) 8
- (4) 7

二、多選題（占 25 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

5. 下列哪些選項的條件，恰可決定唯一的圓？

- (1) 通過 $(0, 0)$ ， $(1, 3)$ ， $(-3, -1)$ 為一圓
- (2) 通過 $(3, 0)$ ， $(-3, 0)$ 且圓心在 y 軸上的圓
- (3) 圓心為 $(2, 4)$ 且與兩軸都相切的圓
- (4) 以 $(4, 7)$ ， $(7, 4)$ 為直徑兩端點的圓
- (5) $A(4, 7)$ ， $B(7, 4)$ ，滿足 $\overline{PA} = k\overline{PB}$ 的點 P 的軌跡方程式。
(其中 k 為一不為零的正實數)

6. 在坐標平面上，直線 $y = 2x$ 與直線 $x + 3y - 7 = 0$ 將坐標平面分割成四個區域，試問下列哪些選項與 $(1, 3)$ 在同一區域？

- (1) $(0, 0)$
- (2) $(0, 3)$
- (3) $(1, 1)$
- (4) $(-1, -1)$
- (5) $(-1, 3)$

7. 若三直線 $L_1: x + 3y + 7 = 0$, $L_2: 2x - y = 0$, $L_3: ax + y - 10 = 0$, 不能圍成三角形, 則 a 之值可能為下列何者?

(1) -12

(2) -3

(3) -2

(4) $\frac{1}{3}$

(5) $\frac{1}{2}$

8. 已知兩平行直線 $L_1: 3x + 4y = 36$, $L_2: 3x + 4y = k$ 分別和圓 C 相切於 $A(a, b)$, $B(-2, -2)$ 兩點, 試問下列選項哪些正確?

(1) 直線 L_2 在直線 L_1 的右半平面

(2) 圓 C 的半徑為 5

(3) 直線 AB 的方程式為 $4x - 3y = -2$

(4) $a - b = -1$

(5) 圓 C 的圓心為 $(1, 2)$

9. 如圖, 聯立不等式 $\begin{cases} ax + by \leq c \\ -2x - y \leq d \end{cases}$ 的圖形為鋪色區域, 試判斷下列情形何者正確?

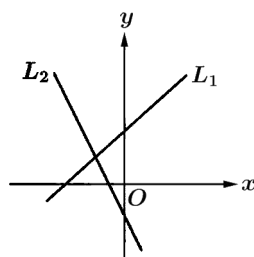
(1) 直線 L_1 方程式為 $-2x - y = d$

(2) $a > 0$

(3) $b > 0$

(4) $c > 0$

(5) $d > 0$



三、填充題（占 42 分）

說明：第 10 題至第 15 題，每題 7 分。

10. 所有通過 $A(0, 2)$ ， $B(4, 0)$ 兩點的圓中，面積最小的圓方程式為

【 】。(以標準式或一般式表達)

11. 設 k 為正數，若 $A(1, 3)$ ， $B(-k+4, 6)$ ， $C(1, 7)$ ， $D(k, 6)$ 為一圓上相異四點，則 $k =$ 【 】。

12. 設 $A(-115, 3)$ ， $B(0, 1)$ ，若線段 AB 與直線 $L: x - 3y + 113 = 0$ 相交於一點 P ，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} =$ 【 】。

13. 已知一直線垂直 $2x - y - 3 = 0$ 且與兩坐標軸所圍成的三角形面積為 16，試求此直線方程式為【 】。(有兩解，答案請以一般式作答)

14. 坐標平面上的圓 $C: (x-5)^2 + (y-12)^2 = 25$ 上有【 】個點與原點的距離正好為整數值。

15. 試求滿足聯立不等式 $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x - y \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ 所形成區域之面積為【 】。

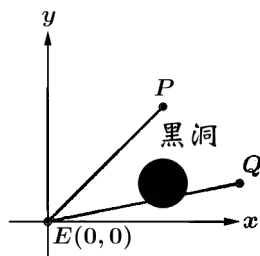
第貳部分：混合題（占 9 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

16 — 17 題組

如果把一物質壓縮得夠小，最終就會得到一個黑洞，而且在一定的距離內，光再也無法逃脫，「史瓦西半徑」就是指任何物質都有的這個臨界距離的特徵半徑。對於一個典型的非旋轉黑洞而言，其史瓦西半徑即代表黑洞的大小，這是因為黑洞的大小被定義為連光也無法逃脫的範圍。黑洞的史瓦西半徑也被稱為「事件視界」。如果特定質量的物質被壓縮進入此半徑之內，則沒有任何已知的力量能夠阻止該物質由於自身的重力而壓縮成一個黑洞。如右下圖所示，在星球 $E(0,0)$ 不遠處有個黑洞，當直線 EQ 與史瓦西圓相交時，從星球 E 是無法看見星球 Q 的，但當直線 EP 與史瓦西圓相切或相離時，從星球 E 可以看見星球 P 。

今設圖中黑洞圓心為 $(3,1)$ ，史瓦西半徑為 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$ ，試回答以下問題：



16. 若 L 代表過星球 $E(0,0)$ 且斜率為 m 的直線，則黑洞圓心 $(3,1)$ 到直線的距離為【 】。（填充題，答案請以符號 m 表示，3 分。）
17. 求過星球 $E(0,0)$ 且與史瓦西圓相切的兩條切線方程式為何？（非選擇題，請以一般式作答，6 分）

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 2 2. 3 3. 4 4. 2

5. 14 6. 25 7. 134 8. 235 9. 34

10. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

11. 4

12. $\frac{1}{10}$

13. $x + 2y \pm 8 = 0$

14. 20

15. 1

第貳部分：混合題

16. $\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$

17. $4x - 7y = 0$ 或 $x - 8y = 0$