

一. 多選題: 20 分, 每題 10 分, 錯一個選項扣 2 分, 未作答者零分.

1. 設 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}$ 為平面上的向量且 r 為一實數, 選出正確的選項

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(2) $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

(3) $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

(4) $\vec{a} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{u} + \vec{a} \cdot \vec{v}$

(5) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$

2. 選出正確的選項

(1) 設 O, A, B, M 為平面上的點且 $\overrightarrow{OM} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, 其中 s, t 為實數.

若已知 M 為 $\overline{AB}$ 中點, 則 $s = t = \frac{1}{2}$

(2) 設 $\vec{u}, \vec{v}$ 是平面上兩向量, 則 $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ 且等號成立的充要條件為 $\vec{u}, \vec{v}$ 其中之一為零向量或 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 平行

(3) 設 $\vec{u}, \vec{v}$ 是平面上兩非零向量, 則該平面上的任何向量可寫成 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的線性組合

(4) 設 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ 為給定向量, 若

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 則滿足 } \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \text{ 的實數 } x, y$$

有無限多組解

(5) 設 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ 為給定向量, 若

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 則滿足 } \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \text{ 的實數 } x, y \text{ 恰有一組解}$$

二. 填充題: 56 分, 每格 7 分, 答案完全正確才能得分.

1. 設實數 x, y 滿足 $x^2 + y^2 = 4$, 令 $k = 12x + 5y$, 則

(i) k 的範圍為_____. (使用區間符號表示, 例如若答案為

$k \geq 3$, 請在格子中填入 $[3, \infty)$.)

(ii) 承上, 當數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 時 k 達到最小值.

2. 設 $O(0, 0), A(1, 2), B(-2, 3)$, 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 且

$-2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4$, 則 P 點所在的區域面積為_____.

3. 設由 $\vec{u}, \vec{v}$ 兩向量張成的平行四邊形面積為 6, 則由 $3\vec{u} - 2\vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$ 所張成的平行四邊形面積為_____.

4. 設 $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (-1, 2)$. 若 $\vec{a} = r\vec{b} + \vec{c}$, 其中 r 為一實數,

$\vec{c}$ 滿足 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. 則

(i) $r =$ _____.

(ii) $\vec{c} =$ _____.

5. 設 k 為一實數且 x, y 的方程組 $\begin{cases} \left(\frac{k}{2} - 3\right)x - 2y = k \\ 3x + (k + 1)y = -\frac{k}{2} - 2 \end{cases}$ 無解,

則 $k =$ _____.

6. 設在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = 4, \overline{CA} = 2, \overline{AB} = 3$, 通過 B 的中線與 $\overline{BC}$ 的中垂線交於 P . 若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 則數對 $(x, y) =$ _____.

三. 計算證明題: 24 分. 請在題號欄位標明題號, 並在作答區寫下詳細的計算或證明過程, 否則不予計分.

1. 設在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = 6, \overline{CA} = 4, \overline{AB} = 5$, 且 S, T 分別是 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 上的點使得 $\overline{SA} = \overline{TA} = 2$. 令 P 為 $\overline{BS}$ 與 $\overline{CT}$ 的交點, 且令 $\theta = \angle PAB$.

(1) 若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 求數對 (x, y) . (6 分)

(2) 求 $\cos \theta$. (6 分)

2. 設 O, A, B, P 為平面上的點,

(1) 命題 a:

若 P, A, B 共線, 則存在實數 x, y , 使 $x + y = 1$ 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.

(i) 命題 a 是否正確? (請寫下是/否, 1 分)

(ii) 承上, 若正確請證明, 若錯誤請給出反例. (5 分)

(2) 命題 b:

若存在實數 x, y , 使 $x + y = 1$ 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 則 P, A, B 共線.

(i) 命題 b 是否正確? (請寫下是/否, 1 分)

(ii) 承上, 若正確請證明, 若錯誤請給出反例. (5 分)

[第 2 頁共 2 頁]

班級_____ 座號_____ 姓名_____

四. 多選題: 20 分, 每題 10 分, 錯一個選項扣 2 分, 未作答者零分.

1	2
12345	5

五. 填充題: 56 分, 每格 7 分, 答案完全正確才能得分

1.(i)	1.(ii)	2	3
$[-26, 26]$	$(-24/13, -10/13)$	70	30
4.(i)	4.(ii)	5	6
$4/5$	$(14/5, 7/5)$	3	$(21/53, 16/53)$

六. 計算證明題: 24 分. 請標明題號, 並在作答區寫下詳細的計算或證明過程, 否則不予計分.

題號	作答區
1.	
(1)	$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$. (過程略)
(2)	$\cos \theta = \frac{23}{2\sqrt{274}}$. (過程略)
2.	
(1)	
(i)	否
(ii)	反例: $A = B, P \neq A$.
(2)	
(i)	是
(ii)	略