

113 學年度第一學期第一次定期考高三數乙試題

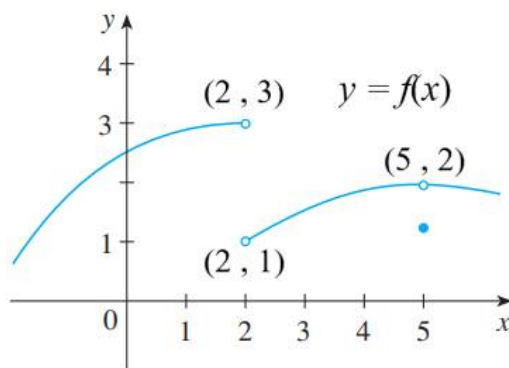
命題範圍：第一章數列與函數的極限

第壹部分：多選題（占 80 分）

第 1 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將答案劃記在答案卡所標記的列號（1-8）。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 10 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 已知函數 $y = f(x)$ 之圖形如右，請選出正確的選項。

- (1) 右極限 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$
- (2) 左極限 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$
- (3) 右極限 $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$
- (4) 左極限 $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2$
- (5) 極限 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ 不存在



2. 已知函數 $f(x) = \sqrt{x}$ 與 $g(x) = \sqrt{2-x}$ ，請選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- (2) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 2\}$
- (3) $(g \circ f)(x)$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 2\}$
- (4) $(fg)(x)$ 的值域為 $\{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 1\}$
- (5) $(f+g)(x)$ 的最大值為 4

3. 請選出正確的選項。

(1) 若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 9$

(2) 若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

(3) 若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(4) 若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，無窮數列 $\langle b_n \rangle$ 為發散數列，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 為發散數列

(5) 若對於無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的任一項均有 $a_n < 1$ ，且 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則必 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$

4. 下列關於級數的敘述，請選出正確的選項。

(1) $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^4 a_k + \sum_{k=5}^{10} a_k$

(2) $\sum_{k=1}^2 (a_k b_k) = (\sum_{k=1}^2 a_k) (\sum_{k=1}^2 b_k)$

(3) $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \frac{4}{11} + \frac{5}{14} - \frac{6}{17} = \sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1} (\frac{k}{3k-1})$

(4) $\sum_{k=1}^n (n + a_k) = n^2 + \sum_{k=1}^n a_k$

(5) $\sum_{k=1}^{10} k^3 = (\sum_{k=1}^{10} k) \cdot (\sum_{k=1}^{10} k)$

5. 請選出正確的選項。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+2} = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^{10} + 2|x| + 3) = 2$

(3) 極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ 不存在

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2-3x+2} \right) = -4$$

$$(5) \text{ 極限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \text{ 不存在}$$

6. 對於任意實數 x ，以 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如：

$[2]=2$ ， $[2.3]=2$ ， $[-2.3]=-3$ 。請選出正確的選項。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} [x] = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} [x] = 3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} x [x] = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

7. 令 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ 。設 a 、 b 、 c 為方程式 $f(x) = 0$ 的三個實根，且 $a < b < c$ ，請選出正確的選項。

$$(1) -2 < a < -1$$

$$(2) 0 < b < 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a^n}{1-a^n} = 1$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2b^n}{1-b^n} = -2$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3c^n}{1-c^n} = -3$$

8. 已知一無窮等比級數的首項為 $0.\bar{3}$ ，第二項為 $0.0\bar{6}$ ，設前 n 項的和為 S_n ， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，請選出正確的選項。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$)
- (1) 公比為 0.2
- (2) 第三項為 $0.01\bar{3}$
- (3) 第四項大於 $\frac{1}{350}$
- (4) 此無窮等比級數的總和為 $\frac{5}{12}$
- (5) 滿足 $|S - S_n| < \frac{1}{12000}$ 的最小正整數 n 之值為 5

第貳部分：選填題（占 20 分）

第 9 至 12 題，請將答案劃記在答案卡所標記的列號（9–17）每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

9. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ 之值為 $\frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}}$ 。（化為最簡分數）

10. 極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{2x+2} - 2}$ 之值為 $\textcircled{11}$ 。

11. 設 a, b 為實數。若函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ ，在 $x = 2$ 處連續，

則數對 $(a, b) = (\textcircled{12}, \textcircled{13} \textcircled{14})$ 。

12. 設 a, b 為實數。已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x) = -f(-x)$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$ ，且極限 $\lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{f(x)}{2x - 1}$ 存在。若 $f(x)$ 的圖形在對稱中心附近的一次近似函數為 $g(x) = ax + b$ ，則數對 $(a, b) = (\textcircled{15} \textcircled{16}, \textcircled{17})$ 。