

# 113 學年度第一學期第二次定期考高三數乙試題

## 命題範圍：微分

### 一、是非題：(每題 3 分，共 18 分)

已知  $f(x)$  為實係數多項式函數，試回答下列問題：

1. 若  $f'(x) \geq 0$ ， $x$  是任意實數，則  $f(x)$  為遞增函數。
2. 若  $f(x)$  為遞增函數，則  $f'(x) \geq 0$ ， $x$  是任意實數。
3. 若  $f'(x) > 0$ ， $x$  是任意實數，則  $f(x)$  為嚴格遞增函數。
4. 若  $f(x)$  為嚴格遞增函數，則  $f'(x) > 0$ ， $x$  是任意實數。
5. 若在區間  $(a, b)$  上， $f''(x) > 0$ ，則  $f(x)$  在區間  $(a, b)$  的圖形是凹向上。
6. 若  $f(x)$  在區間  $(a, b)$  的圖形是凹向上，則在區間  $(a, b)$  上， $f''(x) > 0$ 。

### 二、填充題：(每格 6 分，共 60 分)

1. 函數  $f(x) = \sqrt{x}$  在點  $A(4, 2)$  的切線方程式為  $y = \frac{1}{4}x + 1$ ，  
試求函數  $f(x)$  在  $x = 4$  處的導數。\_\_\_\_(A)\_\_\_\_
2.  $f(x) = \frac{g(x)}{x-4}$ ，其中  $g(x)$  為領導係數是 1 的三次多項式函數，且 1, 2, 3 是  $g(x) = 0$  的三個根，試求  $f'(1)$ 。\_\_\_\_(B)\_\_\_\_
3. 已知函數  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7$ ，試回答下列問題：
  - (1)  $f(x)$  的一階導函數  $\frac{d}{dx} f(x) =$  \_\_\_\_ (C) \_\_\_\_
  - (2)  $f(x)$  的二階導函數  $f''(x) =$  \_\_\_\_ (D) \_\_\_\_
  - (3)  $f'(1) =$  \_\_\_\_ (E) \_\_\_\_
  - (4) 已知  $a, b$  為實數，若函數  $f(x)$  在點  $A(a, f(a))$  的切線方程式為  $y = -12x + b$ ，則  $a =$  \_\_\_\_ (F) \_\_\_\_

4. 已知函數  $f(x)$  的導函數  $f'(x) = a(x-1)(x-2)(x-5)$ ，其中  $a$  是正實數。

考慮以下六個區間： $I_1 = (0,1)$ 、 $I_2 = (1,2)$ 、 $I_3 = (2,3)$ 、 $I_4 = (3,4)$ 、 $I_5 = (4,5)$ 、

$I_6 = (5,6)$ ，試回答下列問題：

(1) 上述六個區間中，函數  $f(x)$  在哪些區間上嚴格遞增？\_\_\_\_(G)\_\_\_\_

(2) 函數  $f(x)$  在  $x = \alpha$  時有局部極小值  $f(\alpha)$ ，則  $\alpha =$ \_\_\_\_(H)\_\_\_\_

(3) 若點  $B(\beta, f(\beta))$  是函數  $f(x)$  圖形的一個反曲點，則  $\beta =$ \_\_\_\_(I)\_\_\_\_

(4) 上述六個區間中，函數  $f(x)$  在哪些區間的圖形是凹向下？\_\_\_\_(J)\_\_\_\_

### 三、計算題：(1 題，共 22 分)

1. 已知三次函數  $f(x) = x^3 - x^2 - px + \frac{3}{2}p$ ，其中  $p$  是實數，以下過程是為了討論

論方程式  $f(x) = 0$  的實根個數，試回答下列問題：

(1) 考慮函數  $g(x) = x^3 - x^2$ ，已知  $\alpha, \beta$  為實數，若  $g(\alpha)$  是函數  $g(x)$  的極大值且  $g(\beta)$  是函數  $g(x)$  的極小值，試求數對  $(\alpha, \beta)$ 。(6 分)

(2) 考慮函數  $h(x) = px - \frac{3}{2}p = p\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ，其中  $p$  是實數，已知函數圖形  $y = h(x)$  恆通過定點  $A$ ，試求  $A$  的坐標。(2 分)

(3) 承(1)，若函數  $g(x)$  在點  $Q(t, t^3 - t^2)$  的切線方程式為

$L: y - (t^3 - t^2) = m(x - t)$ ，試將  $m$  用  $t$  表示。(2 分)

(4) 承(2)及(3)，已知切線  $L$  通過點  $A$ ，試求  $t$  的值。(7 分)

(5) 若方程式  $f(x) = x^3 - x^2 - px + \frac{3}{2}p = 0$  有三個相異實根，試利用上述討論，描繪函數  $g(x)$  的概略圖形並求  $p$  的範圍。(5 分)