

台北市成功高中 113 下高二期末考

一、多選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 10 分。(10-6-2-0)

1. 若將聯立方程組
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 做高斯消去法可得增廣矩陣 $[A|B]$ ，已知 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，其

中 $a = 0, i > j$ ； $B = [b_{ij}]_{3 \times 1}$ ，請選出正確敘述的選項。

- (1) 若 A 有一列的元全為 0 且 B 沒有一列的元全為 0，則此方程組無解
- (2) 若 A 有一列的元全為 0 且 B 亦有一列的元全為 0，則此方程組有無限多解
- (3) 若 A 沒有一列的元全為 0 且 $a_{ij} \neq 0, i = j$ ，則此方程組有唯一解
- (4) 若 $[A|B]$ 有列的元全為 0，則此方程組有無限多解
- (5) 若 $[A|B]$ 沒有列的元全為 0，則此方程組有唯一解

2. 設二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，請選出正確敘述

(1) $A \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

(2) 若二階方陣 B 滿足 $A \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} B$ ，則 $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

- (3) 若將點 P 以原點為中心逆時針旋轉 45° ，再沿 x 軸方向伸縮 4 倍、沿 y 軸方向伸縮 2 倍，最後再以原點為中心順時針旋轉 45° 後得到點 Q ，則 A 也可以將點 P 對應到點 Q
- (4) A 將直線 $L: x - y = 0$ 對應到直線 L 自身

(5) $A^{100} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{100} + 4^{100} & -2^{100} + 4^{100} \\ -2^{100} + 4^{100} & 2^{100} + 4^{100} \end{bmatrix}$

3. 設 A, B 皆為二階轉移矩陣，其中 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，請選出正確敘述的選項。

(1) $a + b + c + d = 2$

(2) 若 A 的反方陣存在，則 $c \neq d$

(3) A 將平面上某一線段對應到一點，則 $c \neq d$

(4) $A - B$ 的反方陣可能存在

(5) 若 A 又為鏡射矩陣，則存在矩陣 $X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，其中 $\alpha \neq \beta$ ，使得 $AX = X$

二、填充題（占 70 分）

說明：第 4 題至第 13 題，每題 7 分。

4. 將一個方程組所對應的增廣矩陣 A 依序進行下列三個步驟的列運算：

(第一步驟) 將第一列與第二列互換

(第二步驟) 將第二列乘 (-2) 倍

(第三步驟) 將第二列乘 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍加到第三列

得另一個增廣矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

試問原來的增廣矩陣 $A = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$ 。

5. 若實數 x, y, z 滿足三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \\ 2x - 5y + 7z = 15 \end{cases}$ ，則試問 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值為【(?)】。

6. 已知 $A = [a_{ij}]_{10 \times 7}$ ， $B = [b_{ij}]_{7 \times 5}$ ， $AB = C = [c_{ij}]_{10 \times 5}$ ， $c_{ij} = 2i + j$ 。

試問 $\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{15} & b_{12} \\ b_{25} & b_{22} \\ b_{35} & b_{32} \\ b_{45} & b_{42} \\ b_{55} & b_{52} \\ b_{65} & b_{62} \\ b_{75} & b_{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$ 。

7. 設 A, B 兩箱中， A 箱內有一黑球一白球； B 箱內有兩白球。甲、乙兩人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣稱為一局。試問第三局結束時， A 箱內兩球為兩白球的機率為【 】。

8. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 將一條法向量為 $\vec{n} = (-2, 3)$ 的直線 L 對應到法向量為 $\vec{n}_1 = (a, 1)$ 的直線 L_1 ，則試問 a 之值為【 】。

9. 設坐標平面上平行四邊形 $OPQR$ ，其中 $O(0, 0)$ ， $P(4, 0)$ ， $Q(1, 4)$ ， $R(5, 4)$ 。若正方形 $OPQR$ 經沿 x 軸方向的推移變換後變為菱形，求此變換所對應的推移矩陣為【 】。

10. 設 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ， O 為原點，若 A^5 所定義的線性變換將點 P 對應到點 Q 且 $\overline{OP} = \sqrt{2}$ ，則試求 $\triangle OPQ$ 之面積為【 】。

11. 設 L 為平面上過原點的一直線，若點 $P(1, 0)$ 對 L 的對稱點為點 $Q\left(-\frac{2}{\sqrt{97}}, -\frac{\sqrt{93}}{\sqrt{97}}\right)$ ，則 $R(0, \sqrt{97})$ 對 L 的對稱點 S 之坐標為【 】。

12. 試求坐標平面上，由四條直線 $L_1: 19x + 53y = 1925$ 、 $L_2: 19x + 53y = 2025$ 、 $L_3: 11x + 17y = 337$ 、 $L_4: 11x + 17y = 353$ 所圍出的平行四邊形區域之面積為【 】。

13. 已知 A 為二階方陣滿足 $(A - 2I_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ 且 $(A - 2I_2)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，其中 I_2 為二階單位矩陣，試問 $A^{10} =$ 【 】。

參考答案

1. 13 2. 134 3. 12

4. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

5. 6

6. $\begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 19 & 16 \end{bmatrix}$

7. $\frac{13}{27}$

8. 5

9. 送分

10. 16

11. $(-\sqrt{93}, 2)$

12. $\frac{80}{13}$

13. $\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ -10240 & 1024 \end{bmatrix}$