

113 學年度第一學期第 2 次定期考高二數學 A 試題

命題範圍：指對數函數及其圖形

可能用到的數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ 。

一、多重選擇題(每題 8 分，共 24 分)

第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以 0 分計算。

1. 關於下列選項中的敘述，請選出正確的選項。

(1) 將 $y = 2^x$ 的圖形向右平移 3 個單位後，可以得到 $y = 8 \times 2^x$ 的圖形。

(2) 將 $y = \log_2 x$ 的圖形向上平移 2 個單位後，可以得到 $y = \log_2(4x)$ 的圖形。

(3) 將 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形以 y 軸為基準線沿水平方向左右伸縮 2 倍，可以得到 $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ 的圖形。

(4) 將 $y = \log_2 x$ 的圖形以 x 軸為基準線沿鉛直方向上下伸縮 2 倍，可以得到 $y = \log_2 x^2$ 的圖形。

(5) 將 $y = 2^{|x|}$ 的圖形對直線 $y = x$ 作對稱，可以得到 $y = |\log_2 x|$ 的圖形。

2. 請選出方程式恰有兩相異實根的選項。

(1) $2^{-x} = x^2$ (2) $\sin x = \log x$ (3) $x^2 - \log_2 x = 2$

(4) $2^{\frac{x}{2}} = 2 \log_2 x$ (5) $2^x + 2^{-x} = 2^{|x|}$ 。

3. 考慮坐標平面上滿足 $5^x = \left(\frac{1}{4}\right)^y$ 的點 $P(x, y)$ ，關於下列選項中的敘述，

請選出正確的選項。

(1) P 點可能是 $(\log_5 4, -1)$ 。

(2) 將 P 點向右移動 $\log 4$ 單位，再向下移動 $\log 5$ 單位所得到的點 Q 仍滿足

$$5^x = \left(\frac{1}{4}\right)^y。$$

(3) 若 $P(x, y)$ 不是原點，則會滿足 $\frac{y}{x} > -1$ 。

(4) 若 $P(x, y)$ 不是原點，則會滿足 $\frac{x}{x-2y} = \log 4$ 。

(5) 所有可能的 $P(x, y)$ 構成的圖形會對稱於原點。

二、填充題(每題 6 分，共 60 分)

4. $3\log\frac{7}{5} - \log 343 - \frac{6}{5}\log\sqrt{32}$ 的值為 ④⑤。

5. $(\log_3 21)(\log_7 21) - (\log_3 7 + \log_7 3)$ 的值為 ⑥。

6. $4^{\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 8 \times \log_8 9}$ 的值為 ⑦⑧。

7. 設函數 $f(x) = \frac{5^{x+1}}{\sqrt{5} - 5^x}$ ，其中 $x \neq \frac{1}{2}$ ，則

$$f\left(\frac{1}{113}\right) + f\left(\frac{2}{113}\right) + f\left(\frac{3}{113}\right) + \cdots + f\left(\frac{112}{113}\right) = \underline{\text{⑨ ⑩ ⑪ ⑫}}。$$

8. 已知兩函數 $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{4}$ 與 $y = \frac{k}{3^x + 3^{-x}}$ 的圖形交於兩點 A, B ，若 $\overline{AB} = 2$ ，

則實數 k 的值為 ⑬ ⑭
⑮。

9. 設 a, b, c 為正整數，若 $\frac{a}{\log_4 2024} + \frac{b}{\log_{11} 2024} + \frac{c}{\log_{23} 2024} = 4$ ，

則數組 $(a, b, c) = (\underline{16}, \underline{17}, \underline{18})$ 。

10. 設 $a > b > 0$ ，且滿足 $(\log_3 a)(\log_3 b) = -2$ 與 $ab = 81$ ，

則 $\log_a b$ 的值為 $\underline{19 \ 20 + 21 \sqrt{22}}$ 。

11. 不等式 $2\log_{\frac{1}{9}}(\frac{17}{2} - 2x) > \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) - 1$ 的解為 $\underline{\frac{23}{24} < x < \frac{2526}{27}}$ 。

12. 設函數 $f(x) = (4x)^{1+\frac{1}{4}\log_2 x}$ ，若 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 時有最小值 m ，

則實數對 $(\alpha, m) = (\underline{\frac{28}{29}}, \underline{\frac{\sqrt[4]{30}}{31}})$ 。

13. 設實數 $x > 1$ ，且滿足 $\log_2(\log_8 x) + \log_4(\log_2 2x) + \log_8(\log_4 3x) = -\log_4 3$ ，

則 $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_8 2x) + \log_8(\log_2 3x)$ 的值為 $\underline{\frac{32 \ 33}{34}}$ 。

三、混合題(共 16 分)

本大題共有 2 題組，配分標於題末。

14-15 題為題組

已知一空曠地區離地高度分別為 z_1 公尺與 z_2 公尺時，平均風速之間的關

係為 $v(z_2) = v(z_1) \cdot \frac{\log(z_2) + k}{\log(z_1) + k}$ ，其中 $v(h)$ 表該地區離地高度 h 公尺時的平

均風速(單位： km/hr)， k 為常數。

14. 一電力公司為評估某陸域風力發電之效益，在該地區離地高度 4 公尺與離地高度 10 公尺處各設置一風速計，測得平均風速分別為 25km/hr 與 30km/hr ，

則 k 的值為 ③⑤。(請選出最接近的選項，單選題，3 分)

(1) 1.1 (2) 1.2 (3) 1.3 (4) 1.4 (5) 1.5。

15. 該地區離地高度為 70 公尺時的平均風速 $v(70)$ 為 ③⑥ ③⑦ km/hr (無條件進位到整數)。若此處的平均風速超過 40km/hr ，則適合風力發電；反之，則不適合。

請問此處是否適合風力發電？ ③⑧。

(回答：是，請填 1；不是，請填 2。)

(此題 5 分，兩格答案均答對才有 5 分)

16-17 題為題組

評估病毒傳播模式有以下兩個重要指標，簡述定義如下：

(一)世代間隔(Serial interval，以 S 表示)：從第一波感染到第二波感染出現的時間。

(二)基本再生數(Basic Reproduction Number，以 R_0 表示)：一個個案在整個患病的病程中平均可以傳給幾個人的指標。若 $R_0 > 1$ ，則感染個數呈指數性成長，每經過 1 次世代間隔(S)後，新感染人數將變為 R_0 倍。

16. 若病毒 A 的世代間隔(S)=6 天，基本再生數(R_0)=4，則經過 30 天後新感染人數將變為 ③⑨ 倍。(單選題，2 分)

(1) 24 倍 (2) 625 倍 (3) 1024 倍 (4) 1296 倍 (5) 4096 倍

R_0 能決定疫情指數成長的程度，但不是常數，在疫情爆發時，適當的介

入可以使 R_0 下降，例如：隔離治療、環境消毒、個人防護具等。而 R_t 值（Effective reproductive number）全名為「有效再生數」，能估算在一定時間內傳染數量的變化，即加上時間考量，進一步觀察隨著時間變化的 R_0 值，其評估公式如下：

$$\log_2 \frac{N(t)}{N(0)} = (R_t - 1) \frac{t}{S}, \text{ 其中 } S: \text{世代間隔}, N(t): \text{在 } t \text{ 時間點下的患病個案}$$

總數

時間 t 天	0	5	10	15	20	25
總感染數 $N(t)$ 人	2	20	160	960	3840	11520

17. 某地發現病毒 X 後，地方政府隨即進行了三級警戒，已知病毒 X 的世代間隔(S)=5 天且感染人數如上表。則第 15 天的 R_t 值為 40 . 41 42，第 20 天的 R_t 值為 43 . 44 45。(四捨五入到小數點後第二位)
- (每格 3 分，共 6 分)