

台中市台中女中 113 下高二第二次期中考 2B

第壹部分：選擇（填）題（占 90 分）

一、是非題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 10 題，每題 2 分。

A 、 B 、 C 為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零方陣，且 $\det(C) \neq 0$ ，請判斷 1~10 題是正確或錯誤。

1. $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$

2. $(AB)^2 = A^2B^2$

3. $A + B + C = C + B + A$

4. 若 $AB = O$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = O$

5. 若 $C^2 = I$ ，則 $C = I$ 或 $C = -I$

6. 設 M 為 2×3 階的矩陣，則 AM 亦為 2×3 階的矩陣

7. 若 $AC = BC$ ，則 $A = B$

8. 若 D 為二階方陣，且 $\det(D) \neq 0$ ，則 $(CD)^{-1} = C^{-1}D^{-1}$

9. 若二階方陣 P 滿足 $CP = I$ ，則 $P = C^{-1}$

10. 若二階方陣 X 滿足 $(X - A)(X - B) = O$ ，則 $X = A$ 或 $X = B$

二、單選題（占 12 分）

說明：第 11 題至第 12 題，每題 6 分。

11. 設 $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, 若 $C = AB = [c_{ij}]$, 則下列哪個選項是 c_{12} 的值?

- (1) 35
- (2) 32
- (3) 29
- (4) 19
- (5) 14

12. 已知 A, B 為二階方陣, 且 $2A + 3B = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $3A - 2B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$, 則下列哪個選項與 $A + B$ 相同?

- (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
- (2) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$
- (3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
- (4) $\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ -12 & -3 \end{bmatrix}$
- (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2

三、多選題 (占 16 分)

說明：第 13 題至第 14 題，每題 8 分。(8 - 6 - 4 - 2 - 0)

13. 設 n 為正整數, 令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$, 請選出正確的選項?

- (1) $b_3 = 5$
- (2) a_1, a_2, a_3 為等比數列
- (3) b_1, b_2, b_3 為等差數列
- (4) c_1, c_2, c_3 為等差數列
- (5) d_1, d_2, d_3 為等比數列

14. 近兩年受全球通膨、供應鏈問題、戰爭與氣候影響等因素，民生必需品價格出現明顯漲價的情況，如表是「兩年前」三種民生必需品分別在兩間超市的單位售價(元/單位)，已知此表可用單價矩陣

$\begin{bmatrix} 45 & 50 \\ 75 & 89 \\ 120 & 130 \end{bmatrix}$ 表示。若兩間超市將這些民生必需品的價格皆以每年 5% 的比例調漲，則下列哪些選項

可以代表「現在」這些民生必需品的單價矩陣？

品項\超市	A 超市	B 超市
雞蛋	45	50
牛奶	79	89
衛生紙	120	130

(1) $(1.05)^2 \begin{bmatrix} 45 & 50 \\ 75 & 89 \\ 120 & 130 \end{bmatrix}$

(2) $2 \times (1.05) \begin{bmatrix} 45 & 50 \\ 75 & 89 \\ 120 & 130 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & 1.05 & 0 \\ 0 & 0 & 1.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 & 50 \\ 75 & 89 \\ 120 & 130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1.05 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 \times 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 1.05 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 1.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 & 50 \\ 75 & 89 \\ 120 & 130 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 45 & 50 \\ 75 & 89 \\ 120 & 130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 1.05 & 1.05 \end{bmatrix}$

四、填充題（占 42 分）

說明：第 15 題至第 21 題，每題 6 分。

15. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，且 $5(X - A) = 3X + 7B$ ，

則矩陣 $X = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ 。

16. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & x \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ y & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} z & -7 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ， $D = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

，已知 $AB + C = D$ ，則序組 $(x, y, z, u) = []$ 。

17. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$

試求 $\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & y \\ w & v \end{bmatrix} = []。$

18. 若矩陣 A, B 滿足 $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$

則 $A^2 - B^2 = []。$

4

19. 已知 A 為二階方陣，若 $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$

則 $A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}。$

試求方陣 $A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}。$

20. 已知二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \langle ? \rangle \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} \langle ? \rangle \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle ? \rangle \\ \end{bmatrix}$

21. 設 P, Q, R 皆為二階方陣，已知 $PQ = \begin{bmatrix} 2025 & 2026 \\ 2028 & 2030 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 2000 & 1996 \\ 2008 & 2025 \end{bmatrix}$

， $Q - R = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $P = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ 。

第貳部分：混合題（占 12 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

22 — 24 題組

若按照英文字母的常用順序，依次編碼如下表。接著，可使用 $2 \times n$ 階矩陣表示編碼，例如：單字

「*BEAUTY*」可表為矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 。但為了保密，我們可以使用一個可逆的二階方陣來做加

密動作，這裡我們使用方陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ 作加密，可將 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 加密為

$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 & 12 & 10 & 20 \\ 6 & 15 & 3 & 17 & 14 & 29 \end{bmatrix}$ ，然後再依序由第一列開始改寫成密碼（將每個數

字視為二位代碼，例如：4 → 04；6 → 06；20 → 20；29 → 29），如下所

示：「041002121020061503171429」。

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
序號	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
字母	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
序號	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

試回答下列問題：

22. 下列哪一個選項為（未加密）矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ 代表的單字（或字串）？（單選題，2 分）

(1) *YOU* (2) *YOH* (3) *YET* (4) *YES* (5) *TOP*

23. 已知方陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ，若方陣 B 滿足 $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

則方陣 $B = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ （填充題，3 分）

24. 若今天收到了一張密碼：「142102101810120810213103142714171215」，試求原本的英文單字（或字串）。（非選擇題，5 分）

6

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. $\bigcirc$ 2. $\times$ 3. $\bigcirc$ 4. $\times$ 5. $\times$

6. $\bigcirc$ 7. $\bigcirc$ 8. $\times$ 9. $\bigcirc$ 10. $\times$

11. 3 12. 1

13. 245 14. 13

15. $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

16. $(3, 4, 0, -5)$

17. $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -25 & 11 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 8 & -13 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$

第貳部分：混合題

22. 4

23. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

24. ***GRATITUDE***