

台南市台南一中 112 下高二期末考

一、單選題（占 10 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ，則 AB 的第 $(2, 1)$ 元素為何？

- (1) -3
- (2) 2
- (3) -2
- (4) 5
- (5) -5

2. 令 A 、 B 、 C 為兩兩獨立之事件且 $P(C) > 0$ 、 $P(A \cap B \cap C) = 0$ ，則 $P(A' \cap B' | C)$ 必與下列哪一個選項相等？

- (1) $P(A') + P(B')$
- (2) $P(A') - P(B')$
- (3) $P(A) + P(B')$
- (4) $-P(A) + P(B')$
- (5) $P(A) - P(B')$

二、多選題（占 15 分）

說明：第 3 題至第 5 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

3. 若 X 與 Y 為兩事件， $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ 、 $P(Y|X) = \frac{1}{3}$ 且 $P(X \cup Y) = \frac{2}{3}$ ，則下列選項哪些正確？

(1) $P(X \cap Y) = \frac{1}{6}$

(2) $P(X) = \frac{1}{2}$

(3) X 與 Y 為互斥事件

(4) X 與 Y 為獨立事件

(5) $P(Y'|X) = \frac{2}{3}$

4. 有一船有三顆獨立運作的引擎 E_1 、 E_2 、 E_3 ， E_1 、 E_2 、 E_3 正常運作的機率分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4}$ 。這艘船需至少兩顆引擎運作才能前進，令 X 表船前進的事件、 X_1 表 E_1 正常運作之事件、 X_2 表 E_2 正常運作之事件、 X_3 表 E_3 正常運作之事件，則下列哪些選項正確？

(1) $P(X_1 \cap X_2 \cap X_3) = \frac{1}{32}$

(2) $P(X) = \frac{1}{4}$

(3) $P(X_1|X) = \frac{7}{8}$

(4) $P(\text{恰兩顆引擎正常運作} | X) = \frac{7}{8}$

(5) $P(X|X_2) = \frac{5}{16}$

5. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 、 $\det(A) \neq 0$ ， P 、 Q 、 R 為平面上三相異點且 P' 、 Q' 、 R' 分別為 P 、 Q 、 R 經 A 線性變換所對應點，則下列選項哪些必正確？

(1) $\angle PQR = \angle P'Q'R'$

(2) $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$

(3) $\triangle P'Q'R'$ 面積 $= \triangle PQR$ 面積 $\cdot |\det(A)|$

(4) 若 P 、 Q 、 R 共線，則 P' 、 Q' 、 R' 共線

(5) 若 P 、 Q 、 R 共線，則 $\overline{PQ} : \overline{QR} = \overline{P'Q'} : \overline{Q'R'}$

三、填充題（占 65 分）

說明：第 6 題至第 18 題，每題 5 分。

6. 籤筒有 3 支中獎籤和 7 支銘謝惠顧的籤。甲、乙、丙 3 人依序抽籤，抽後不放回，則丙抽到中獎籤的機率為何？

7. 若 $A_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 5 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 99 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 98 & 100 \end{bmatrix}$ ，則第 (6,3) 元與第 (6,8) 元之和為何？

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ，若 $A = xA + yI$ ，其中 $x, y \in \mathbb{R}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則數對 $(x, y) = ?$

9. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^{2024} = ?$

10. 試求 $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^6 = 64 \cdot A$ ，則 $A = ?$

11. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，其行列式 (值) 為 $-\frac{7}{20}$ 且 $a \cdot d = \frac{1}{10}$ 、 $a > d$ ，則數對 $(a, d) = ?$

12. 在直角坐標系中，將 $A(1, 1)$ 及 $B(3, -2)$ 沿 x 軸方向推移 y 坐標的 k 倍 ($k > 0$)，分別得 A' 及 B' ，若 $\angle A'OB' = 90^\circ$ 其中 O 為原點，則 $k = ?$

13. $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \{0, 1\} \right\}$ ，從 S 中隨機取一矩陣每個矩陣被取到之機率相等，則在此矩陣之反矩陣存在之條件下，此矩陣之行列表值為 1 的機率為何？
14. 昔者曾子處費，費人有與曾子同名族者而殺人。人告曾子母曰“曾參殺人。”曾子之母曰“吾子不殺人。”織自若。有頃焉，人又曰“曾參殺人。”其母尚織自若也。頃之，一人又告之約“曾參殺人。”其母懼，投杼逾牆而走。假設曾子所處時代殺人率為 0.1% 且訊息傳遞正確率為 90%，則曾子母親在接收到獨立三人告知曾參殺人的條件下，曾參殺人的機率為何？
15. 有一箱子裝有編號 1 號至 25 號大小形狀相同之球，依序取出兩顆球取後不放回，試問第一顆球號碼減第二顆球號碼不小於 10 之機率為何？
16. 設甲袋中有 2 顆紅球，乙袋中有 4 顆紅球 1 顆白球，每次同時從甲袋任取 1 球及乙袋任取 1 球互換(任一袋中之每球被取到機率相等)，此稱為一局，則二局後甲袋中有 1 紅球 1 白球的機率為何？
17. 有一箱子裝有 3 黑球 2 白球且每球被取到機率相等，先從箱中取一球取後放回，若取到黑球則將 $P(1, 0)$ 經 $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ 線性變換 (即 $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$) 且令 P 經線性變換後所得到的點為 $P_1(x_1, y_1)$ ；若取到白球則將 $P(1, 0)$ 經線性變換 (即 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$) 且令 P 經線性變換後所得到的點為 $P_1(x_1, y_1)$ 。再從箱中取一球取後放回，若取到黑球則將 P_1 經 $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ 線性變換 (即 $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$)；若取到白球則將 P_1 經 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (即 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$) 且令 P_1 經線性變換後所得到的點為 $P_2(x_2, y_{21})$ 。O 為原點，試問 $\triangle OP_1P_2$ 的面積不是最小的條件下， $\triangle OP_1P_2$ 的面積是最大的機率？
18. $m \in \mathbb{N}$ ，有一箱子裝有 $m^2 + m + 25$ 枚硬幣其中有 m 枚公正硬幣、 $m^2 + 25$ 枚不公正硬幣，公正硬幣擲出正面之機率為 $\frac{1}{2}$ 、不公正硬幣擲出正面之機率為 $\frac{2}{3}$ 。從箱子取一枚硬幣，每枚硬幣被取到機率相等，投擲兩次，在第一次正面第二次反面之條件下，當 $m = n$ 時，取到的硬幣為公正硬幣之機率有最大值 P ，試問數對 $(n, P) = ?$

四、計算題（占 10 分）

說明：第 19 題至第 20 題，每題 5 分。

19. 對直線 $3x - 4y = 0$ 鏡射之變換矩陣 A 為何？

20. $L: 2x - y = 1$ 對 $3x - 4y = 0$ 鏡射後所得直線為 L' ，則 L' 的方程式為何？

參考答案

1. 3 2. 4

3. 1245 4. 1234 5. 345

6. $\frac{3}{10}$

7. 108

8. $\left(-\frac{1}{13}, \frac{7}{13}\right)$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 18 & 153 \\ 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right)$

12. 1

13. $\frac{1}{2}$

$$14. \frac{27}{64}$$

$$15. \frac{1}{5}$$

$$16. \frac{13}{50}$$

$$17. \frac{3}{7}$$

$$18. \left(5, \frac{9}{89}\right)$$

$$19. \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}$$

$$20. 2x - 11y = -5$$