

112 學年度第一學期第一次定期考高三數甲試題

命題範圍：第一章極限

注意事項：本卷出現的函數都滿足定義域與對應域都是實數的部分集合。若在呈現一個函數時，未指明定義域，則定義域就是使函數有意義的最大集合。

一、是非題（每題 2 分，共 36 分）

題組甲

已知無窮數列 $\langle a_n \rangle = \langle \overbrace{0.999\dots 9}^{n\text{個}9} \rangle : 0.9, 0.99, 0.999, \dots, \overbrace{0.999\dots 9}^{n\text{個}9}, \dots$ 。而且 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，極限為 L 。請判斷第 1~6 題的敘述是否正確。

1. L 可以用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{0.999\dots 9}^{n\text{個}9}$ 來表示

2. $L < 1$

3. L 是集合 $\left\{ \overbrace{0.999\dots 9}^{n\text{個}9} \mid n \in \text{正整數} \right\}$ 中的一個元素

4. $L = \frac{0.9}{1-0.1}$

5. $L > 0.\bar{9} \times 0.\bar{9}$

6. $L < \lim_{n \rightarrow \infty} 1.\overbrace{000\dots 0}^{n\text{個}0} 1$

題組乙.

已知函數 $f(x) = \frac{(x-3)(x-2023)}{x(x-8)(x-2023)}$ 與函數 $g(x) = \frac{x-3}{x(x-8)}$ ，請判斷第 7~9 題的敘述是否正確。

7. $f(x)$ 與 $g(x)$ 是同一個函數

8. $\lim_{x \rightarrow 2023} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2023} g(x)$

9. 因為 $f(-1) < 0$ ， $f(1) > 0$ 所以由勘根定理可知，在區間 $(-1, 1)$ 內必有方程式 $f(x) = 0$ 的實根

題組丙.

已知函數 $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5}, & x \neq 5 \\ k, & x = 5 \end{cases}$ ($k \in \text{實數}$),

請判斷第 10~13 題的敘述是否正確。

10. 無論 k 值為何, $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 10$

11. 無論 k 值為何, $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = k$

12. 若 $h(x)$ 在 $x = 5$ 連續, 則 $k = 10$

13. $\lim_{x \rightarrow 7} h(x) = 12$

題組丁.

假設某停車場的停車費, 第一個半小時是 15 元, 之後每半小時是 30 元, 不滿半小時以半小時計算, 則 t 小時的停車費 $C(t)$ 公式如下, (單位: 元)

$$C(t) = 15 - 30 \cdot [1 - 2t], t > 0$$

其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數, 例如: $[3.5] = 3$, $[-3.1] = -4$, $[-5] = -5$ 等。請判斷第 14~18 題的敘述是否正確。

14. 10 小時的停車費是 585 元

15. $[1 - 2t] = -[2t - 1]$

16. $\lim_{t \rightarrow 10.5} C(t) = 615$

17. $\lim_{t \rightarrow 11.2} C(t) = 675$

18. 因為 $C(1) = 45$, $C(2) = 105$, 所以由中間值定理可知至少有一實數 r 滿足 $1 < r < 2$ 且 $C(r) = 90$

二、選填題 (每格 5 分, 共 30 分)

A. 設 $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 3x + 4$, 則 $(g \circ f)(1) + (f \circ g)(2) = \underline{\textcircled{19}\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。

B. 函數 $f(x) = \sqrt{35 - 2x - x^2}$ 的值域為閉區間 $\underline{\textcircled{22}, \textcircled{23}}$ 。

C. (1) 數列 $\langle \frac{4n^2}{n^2+9} \rangle$ 的極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2+9} = \underline{24}$ 。

(2) 承上題，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2+9} = L$ ，

則數列 $\langle \frac{4n^2}{n^2+9} \rangle$ 從第25 26 27項開始，其值與 L 的差 $\left| \frac{4n^2}{n^2+9} - L \right|$ 會小於 $\frac{1}{10000}$ 。

D. 若 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} = L$ ，則 x 與 5 的距離 $|x - 5|$ 小於等於何值時，其函數值與 L 的差 $\left| \frac{1}{x} - L \right|$ 最多是 $\frac{1}{10000}$ ？

答： $\frac{\underline{28}}{\underline{29\ 30\ 31\ 32}}$ 。

二、計算證明題（3 題，共 34 分）

1.

在校慶園遊會中，創意行銷扮演著相當重要的角色。已知建仔攤位專賣紅茶，計畫推出一項名為「紅茶容量加大連連」的促銷活動。在這項活動中，當顧客支付 20 元後，必須投擲一個公正硬幣。如果硬幣投擲出反面則投擲結束，顧客將獲得 500 cc（立方公分）的紅茶；但如果硬幣投擲出正面，然後再次投擲出反面，顧客將獲得的紅茶量為 500 + 250 cc。若連續投擲 2 次正面，然後才投擲出反面，則顧客獲得的紅茶量為 500 + 250 + 125 cc，依此類推。若連續投擲 $n - 1$ 次正面，然後才投擲出反面（總共投擲了 n 次硬幣），顧客將獲得的紅茶量為

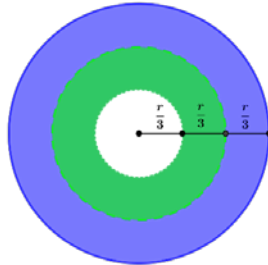
$$500 + 500 \times \frac{1}{2} + \cdots + 500 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ cc}。$$

然而，700 cc 紅茶的所有成本是 20 元，因此當支付 20 元購買紅茶的顧客獲得的紅茶量超過 700 cc 時，建仔攤位會虧本。為了評估這個促銷活動的可行性，請計算支付 20 元購買紅茶的顧客獲得的紅茶量的數學期望值。

(12 分)

2.

建仔欲利用環形面積的低估與高估，來證明半徑為 r 的圓面積 $A = \pi r^2$ 。
他首先將半徑 3 等分，然後利用同心圓劃分出三個區域，分別為區域 1、區域 2 和區域 3，如下所示：



	區域 1	區域 2	區域 3
圖示			
說明	半徑 $\frac{r}{3}$ 的圓	寬度 $\frac{r}{3}$ 的同心圓環區域， 小圓半徑 $\frac{r}{3}$ ，大圓半徑 $\frac{2r}{3}$	寬度 $\frac{r}{3}$ 的同心圓環區域， 小圓半徑 $\frac{2r}{3}$ ，大圓半徑 $\frac{3r}{3}$
面積的低估	以長 $2\pi \cdot 0$ ，寬 $\frac{r}{3}$ 的矩形 做估計，面積為 0	以長 $2\pi \cdot \frac{r}{3}$ ，寬 $\frac{r}{3}$ 的矩形 做估計，面積為 $2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{r}{3}$	以長 $2\pi \cdot \frac{2r}{3}$ ，寬 $\frac{r}{3}$ 的矩形 做估計，面積為 $2\pi \cdot \frac{2r}{3} \cdot \frac{r}{3}$
面積的高估	以長 $2\pi \cdot \frac{r}{3}$ ，寬 $\frac{r}{3}$ 的矩形 做估計，面積為 $2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{r}{3}$	以長 $2\pi \cdot \frac{2r}{3}$ ，寬 $\frac{r}{3}$ 的矩形 做估計，面積為 $2\pi \cdot \frac{2r}{3} \cdot \frac{r}{3}$	以長 $2\pi \cdot \frac{3r}{3}$ ，寬 $\frac{r}{3}$ 的矩形 做估計，面積為 $2\pi \cdot \frac{3r}{3} \cdot \frac{r}{3}$

接著，建仔將上表中對於 A 的估算寫成不等式：

$$2\pi \cdot 0 \cdot \frac{r}{3} + 2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{r}{3} + 2\pi \cdot \frac{2r}{3} \cdot \frac{r}{3} \leq A \leq 2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{r}{3} + 2\pi \cdot \frac{2r}{3} \cdot \frac{r}{3} + 2\pi \cdot \frac{3r}{3} \cdot \frac{r}{3}$$

現在，請重新將半徑 n 等分並仿照建仔的方法估算 A ，然後使用夾擠定理證明圓面積公式

$$A = \pi r^2$$

(12 分)

3. 以下是課本對於自然常數 e 的介紹：

數列 $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ 為嚴格遞增數列，而 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284 \dots$

某日建仔用電腦(Excel 軟體)計算 $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$ ， $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$ ，

$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$ ， $\dots$ ， $\left(1 + \frac{1}{10^k}\right)^{10^k}$ 的值，卻驚訝發現：

當 $k = 15$ 時， $\left(1 + \frac{1}{10^k}\right)^{10^k}$ 的計算結果是 3.035035207...，截圖如下：

k	$(1+1/10^k)^{(10^k)}$
1	2.59374246
2	2.704813829
3	2.716923932
4	2.718145927
15	3.035035207

為確認是電腦的計算出了問題，請證明：

(1)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

(2)

對於 $n = 1, 2, 3, \dots$ ，數列 $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ 的每一項皆小於 3。