

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度第二學期高三數甲第一次期中考試題卷

註：個人資訊畫卡錯誤者，扣 5 分。

一、單選題 (18 分)

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題答對者得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者得 0 分。

1. 設數列 $a_n = \frac{2^{n+2} + 3^{n+1}}{4^{n-1} + 5^{n-2}}$ ， $b_n = \frac{4}{\sqrt{n}} - 2$ ， $c_n = \frac{9n + 6n^2}{-3n^2 + n}$ ，其中 n 為自然數，試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times c_n + b_n \times c_n)$ 的值為下列何者？
(1) -12 (2) 0 (3) 4 (4) 6 (5) 8

2. 設 $-2 \leq x \leq 4$ ，試問下列哪一個函數的值域包含最多個正整數？

(1) $f_1(x) = x + |x|$ (2) $f_2(x) = \sin x$ (3) $f_3(x) = \log(3^x)$ (4) $f_4(x) = (x-2)^3 - 2$ (5) $f_5(x) = \tan(0.1\sqrt{x^2})$

3. 設 $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$ ，其中 a_k 為實數，試問下列何者的值最大？

(1) a_1 (2) a_3 (3) a_5 (4) a_7 (5) a_9

二、多選題 (40 分)

說明：第 4 至 7 題為多選題，每題各有五個選項。每個選項答對得 2 分，所有選項均未作答，該題以 0 分計算。

4. 設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 均為無窮數列，試選出正確的選項。

(1) 若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂

(3) 若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\langle a_n^2 \rangle$ 為收斂數列

(4) 若 $\langle a_n + b_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\langle a_n \rangle$ 或 $\langle b_n \rangle$ 為收斂數列

(5) 若對所有自然數 n ， $a_n \leq c_n \leq b_n$ 均成立，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.5 \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 不存在

5. 設函數 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ ，且 $xg(x) = f(x) - 5$ ，試選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 在區間 $[-\sqrt{3}, -1] \cup [2, 4]$ 為嚴格遞增函數
- (2) $f''(x)$ 在區間 $[1, \infty)$ 為嚴格遞增函數
- (3) $f'''(x)$ 在區間 $[-1, 1]$ 為嚴格遞減函數
- (4) 若 $f(a)$ 為 $f(x)$ 的極大值，則實數 $a = 0$
- (5) 若 $g(x)$ 在 $x = a$ 處有極大值，則 $g(a) = 4\sqrt{2} + 2$

6. 設函數 $f_1(x) = \sqrt{x}$ ， $f_2(x) = x^2 - 2x - 8$ ， $f_3(x) = 3 - \sqrt{x}$ ， $f_4(x) = \log|x|$ ， $f_5(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 1, & x \geq 1 \\ k, & x < 1 \end{cases}$ ，其中 k 為實數。

試選出正確的選項。

- (1) $f_1(x)$ 的反函數為 $f_1^{-1}(x) = x^2$ ，其中 x 為非負實數
- (2) $(f_2 \circ f_1)(x)$ 的定義域與 $(f_4 \circ f_3)(x)$ 的定義域相同
- (3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f_2(x)}{x - 4} = 6$
- (4) 若 $f_5(x)$ 為連續函數，則 $k = -2$
- (5) 若 $g(x - 1) = (f_1 \circ f_2)(x)$ ，則 $g(x)$ 為偶函數

7. 設 n 為自然數，試選出正確的選項。

- (1) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = 0.3$
- (3) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2^{k-2}}{3^{k-1}}\right) = 1$
- (4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k(k+n)} \right)$ 不存在

三、選填題 (42 分)

說明：第 8 至 13 題為選填題，每題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

8. 若 $g(x) = 0.2x^{30} + x$ ，則 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(1+t) - g(1)}{t}$ 的值為 ⑧。

9. 若 $h(x) = \frac{(2x+1)^2(x-1)}{3x}$ ，則 $h'(1)$ 的值為 ⑨。

10. 設三次函數 $Q(x) = kx^3 - 3x^2 + (k+2)x + 1$ 有極大值與極小值，若 k 為整數，則滿足此條件的 k 有 ⑩ 個。

11. 設函數 $g(x) = x^4 + 2kx^3 + 3x^2 + 4$ 沒有反曲點，若 k 為正整數，則 k 的值為 ⑪。

12. 若函數 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ 在區間 $[0, 3]$ 的最大值與最小值分別為 M 與 m ，則 $3M + m$ 的值為 ⑫。

13. 設直線 L 過 $P(3, 6)$ ，且與 $y = -x^2 + 4x - 1$ 的圖形相切，若 L 的斜率為負數，且交 x 軸於點 $R(a, b)$ ，則 a 的值為 ⑬。

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度第二學期高三數甲第一次期中考參考答案

註：個人資訊畫卡錯誤者，扣 5 分。

一、單選題（18 分）

題號	1	2	3
答案	(3)	(1)	(2)

二、多選題（40 分）

題號	4	5	6	7
答案	(1)(3)	(1)(2)(4)	(1)(3)(4)(5)	(3)(4)(5)

三、選填題（42 分）

題號	8	9	10	11	12	13
答案	7	3	2	1	0	4