

台南市台南女中 112 上高三第二次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 在坐標平面上，已知三次多項式函數 $f(x)$ 在 $x = -1$ 處有極大值 3，且點 $(0, -1)$ 為 $y = f(x)$ 圖形的反曲點，則 $f(1)$ 之值為下列何者？

- (1) -7
- (2) -5
- (3) -3
- (4) 1
- (5) 5

2. 試求 $\int_0^3 |x^3 - 4x| dx$ 的值為下列何者？

- (1) $\frac{9}{4}$
- (2) $\frac{25}{4}$
- (3) $\frac{31}{4}$
- (4) $\frac{37}{4}$
- (5) $\frac{41}{4}$

3. 在坐標平面上，設 R_1 表曲線 $y = -x^2 + 6x$ 與直線 $y = 0$ 所圍的有界區域， R_2 表曲線 $y = -x^2 + 6x$ 與直線 $y = mx$ 所圍的有界區域，其中 $m > 0$ 。若 $R_1 = 8R_2$ ，則 m 之值為下列何者？

- (1) $2 - \sqrt[3]{4}$
- (2) 1
- (3) $6 - 3\sqrt[3]{4}$
- (4) 3
- (5) 6

4. 在坐標平面上，試求兩函數 $y = f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 6x$ 與 $y = g(x) = 2x^2 + 2x$ 的圖形所圍成的區域面積為下列何者？

- (1) 8
- (2) 12
- (3) 16
- (4) 20
- (5) 24

5. 坐標平面上，設 O 為原點，已知函數 $y = f(x) = (x - 3)^2$ 及其圖形上一點 $P(t, (t - 3)^2)$ ，其中 $0 < t < 3$ 。若 $y = f(x)$ 在點 P 的切線為 L ，且 L 與 x 軸、 y 軸分別交於點 A 、點 B ，則 $\triangle OAB$ 面積的最大值為下列何者？

- (1) 8
- (2) 24
- (3) 36
- (4) 64
- (5) 128

6. 試問極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \left(\sqrt{3n^2 + 4 \times 1^2} + \sqrt{3n^2 + 4 \times 2^2} + \cdots + \sqrt{3n^2 + 4 \times n^2} \right)$ 的值可用下列哪一個定積分表示？

- (1) $\int_0^4 \sqrt{3 + 4x^2} dx$
- (2) $\int_0^4 \sqrt{3x^2 + 4} dx$
- (3) $\int_0^2 \sqrt{3 + 4x^2} dx$
- (4) $\int_0^2 \sqrt{3 + x^2} dx$
- (5) $2 \int_0^2 \sqrt{3 + x^2} dx$

二、多選題（占 25 分）

說明：第 7 題至第 11 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

7. 在坐標平面上，已知 $f(x)$ 為實係數多項式函數且 $\deg f(x) \geq 2$ ，定義域為所有實數。請選出正確的選項。

- (1) 設 a 為實數，若 $f(a)$ 為極值，則 $f'(a) = 0$
- (2) 設 a 為實數，若 $f'(a) = 0$ ，則 $f(a)$ 為極值
- (3) 若 $\deg f(x) = 2$ ，則必存在實數 a ，使得 $f'(a) = 0$
- (4) 若 $\deg f(x) = 3$ ，則必存在實數 a ，使得 $f'(a) = 0$
- (5) 若 $\deg f(x) = 4$ ，則必存在實數 a ，使得 $f'(a) = 0$

8. 在坐標平面上，已知 $f(x)$ 為實係數多項式函數且 $\deg f(x) \geq 2$ ，定義域為所有實數。請選出正確的選項。

- (1) 設 a 為實數，若點 $(a, f(a))$ 為 $y = f(x)$ 圖形之反曲點，則 $f''(a) = 0$
- (2) 設 a 為實數，若 $f''(a) = 0$ ，則點 $(a, f(a))$ 為 $y = f(x)$ 圖形之反曲點
- (3) 若 $\deg f(x) = 2$ ，則必存在實數 a ，使得點 $(a, f(a))$ 為 $y = f(x)$ 圖形之反曲點
- (4) 若 $\deg f(x) = 3$ ，則必存在實數 a ，使得點 $(a, f(a))$ 為 $y = f(x)$ 圖形之反曲點
- (5) 若 $\deg f(x) = 4$ ，則必存在實數 a ，使得點 $(a, f(a))$ 為 $y = f(x)$ 圖形之反曲點

9. 已知三次函數 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + (a+8)x + 7$ 沒有極值，請選出實數 a 可能的值。

- (1) -3
- (2) -1
- (3) 1
- (4) 3
- (5) 5

10. 在坐標平面上，設實係數多項式函數 $f(x)$ 滿足 $y = f'(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，且該拋物線通過點 $(1, 0)$ 與點 $(3, 0)$ 。請選出正確的選項。

- (1) $f(2) < f(3)$
- (2) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，以點 $(3, f(3))$ 為切點之切線斜率為正數
- (3) $y = f(x)$ 的圖形恰有一個反曲點 $(2, f(2))$
- (4) $f(x)$ 在 $x = 1$ 處有極大值
- (5) $y = f(x)$ 在區間 $(1, 3)$ 的圖形是凹口向上

11. 在坐標平面上，設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + \int_1^x f(t) dt$ 對 $x \geq 1$ 恆成立， a 為大於 1 的實數。請選出正確的選項。

(1) $f(1) = 2$

(2) $f(x)$ 為四次多項式函數

(3) $y = f(x)$ 的圖形有水平切線

(4) $\frac{1}{a-1} \int_1^a f(x) dx > 6$ 恆成立

(5) 在區間 $[1, a]$ 上至少存在一個實數 b ，使得 $f(b) = \frac{1}{a-1} \int_1^a f(x) dx$

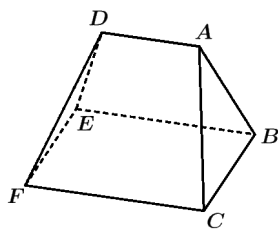
三、填充題（占 10 分）

說明：第 12 題至第 13 題，每格 5 分。

12. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} x+1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - 6x + 6 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 。設 $1 \leq t \leq 2$ ，定義函數 $g(t) = \int_{t-1}^t f(x) dx$ 。當

$1 \leq t \leq 2$ 時，試求 $g(t)$ 的最小值為【 】。

13. 有一積木(如圖)，其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形， $BCFE$ 是一個矩形。設 A 點在平面 $BCFE$ 的投影為點 P ，已知 $\overline{AD} = 20$ 、 $\overline{CF} = 40$ 、 $\overline{AP} = 10$ 且 $\overline{BC} = 30$ ，則積木的體積為【 】。



第貳部分：混合題（占 35 分）

說明：本部分共有 3 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

14 — 15 題組

在坐標平面上，已知函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ 。根據上述，試回答下列問題。

14. 試求 $y = f(x)$ 的圖形之反曲點坐標為下列何者？(單選題，5 分)

- (1) $(-2, 15)$
- (2) $(-1, 0)$
- (3) $(0, 3)$
- (4) $(1, 0)$
- (5) $(2, -3)$

15. 試求定積分 $\int_{-3}^5 f(x)dx$ 的值為下列何者？(單選題，5 分)

- (1) -5
- (2) 0
- (3) 5
- (4) 60
- (5) 105

16 — 17 題組

在坐標平面上，已知 R 為函數 $y = \sqrt{16 - x^2}$ 的圖形與 x 軸、直線 $x = 2$ 、直線 $x = 2\sqrt{2}$ 所圍成的區域。根據上述，試回答下列問題。

(參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$)

16. 試問 R 的面積最接近下列何者？(單選題，5 分)

- (1) 0.5
- (2) 1
- (3) 1.7
- (4) 2.6
- (5) 4

17. 試問 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積最接近下列何者？(單選題，5 分)

- (1) 5
- (2) 10
- (3) 17
- (4) 26
- (5) 40

18 — 20 題組

設 $x \geq 0$ ，已知兩函數 $f(x) = x^2$ 與 $g(x) = \sqrt{x}$ 。設 A, B 為兩非空集合，當兩函數 $f: A \rightarrow B$ 與 $g: B \rightarrow A$ 滿足 $g(f(x)) = x$ 對所有 $x \in A$ 均成立，以及 $f(g(x)) = x$ 對所有 $x \in B$ 均成立時，稱函數 f 與 g 互為反函數。根據上述，試回答下列問題。

18. 試證明當 $x \geq 0$ 時， $f(x) = x^2$ 與 $g(x) = \sqrt{x}$ 互為反函數。(非選擇題，5 分)

19. 已知正實數 a 滿足 $\int_0^a x^2 dx + \int_0^a \sqrt{x} dx = 1$ ，試證明 $a = 1$ 。(非選擇題，5 分)

20. 試求定積分 $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ 的值。(非選擇題，5 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 2 2. 5 3. 4 4. 3 5. 1 6. 5

7. 135 8. 14 9. 34 10. 34 11. 45

12. $\frac{5}{3}$

13. 5000

第貳部分：混合題

14. 4

15. 2

16. 4

17. 5

18. 略

19. 略

20. $\frac{2}{3}$