

台中市台中女中 112 上高三第一次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 84 分）

一、多選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

1. 關於數列的敘述，下列何者正確？

- (1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 -3 ，則數列 $\langle a_n^2 \rangle$ 收斂到 9
- (2) 若數列 $\langle a_n^2 \rangle$ 收斂於 1，則數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂到 1 或 -1
- (3) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 恆有 $a_{n+1} > a_n$ ，則數列 $\langle a_n \rangle$ 必為發散
- (4) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 均發散，則數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ 必為發散
- (5) 若數列 $\left\langle \frac{1}{2}a_n + b_n \right\rangle$ 、 $\langle -3a_n + 5b_n \rangle$ 均收斂，則數列 $\langle a_n \rangle$ 必為收斂

2. 下列哪些極限值是正确的？

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 4$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(3 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n^2 + 1} - 4 \right) \right] = -12$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{6}$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{n^2 - 1}{n + 2} \right) = 2$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n = 3e$

3. 關於函數的敘述，下列何者正確？

(1) $f_1(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 處連續

(2) $f_1(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 處可微分

(3) $f_2(x) = [x]$ 在 $x = 1$ 處連續

(4) $f_2(x) = [x]$ 在 $x = 1$ 處可微分

(5) $f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 處可微分

二、填充題（占 60 分）

說明：第 4 題至第 15 題，每題 5 分。

4. 函數 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 21}}{|x| - x}$ 的定義域為 $\{x \mid \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}\}$ 。

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n}) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

6. 已知數列 $\frac{3}{-n^2 + n}$ ， $\frac{7}{-n^2 + n}$ ， $\frac{11}{-n^2 + n}$ ， $\dots$ ， $\frac{4n-1}{-n^2 + n}$ 為等差數列，且此 n 項的和為 S_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + (-5)^{n+1}}{4^{n-2} + (-5)^{n+3}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

8. 設 $f(x) = \frac{(x+7)(-x-1)}{3(x+9)^2}$ ，則 $f'(-7) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

9. 二次多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -2$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 + 2x - 8} = \frac{1}{3}$ ，則 $f(0) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

10. 設 $h(x) = 3x - 12$ ， $g(x) = h(x+5)$ ，且 $(f \circ g)(x) = 6x - 1$ ，則 $f(x) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + 7}{(x-1)^2} = c$ ，且 a 、 b 、 c 皆為實數，則 $a + b + c =$ 【 】。

12. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+5 & , \text{當 } x \geq -2 \\ \sqrt{-x^3 + kx + 3} & , \text{當 } x < -2 \end{cases}$ 為連續函數，則實數 $k =$ 【 】。

13. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+3)^{50} - 1}{x+2} =$ 【 】。

14. 已知 $f(x) = [x + 2.5] + [3 - x]$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = a$ 、 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = b$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】。

15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-4| + x - 5}{|x^2 - x| - 6} =$ 【 】。

第貳部分：混合題（占 16 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

16 — 17 題組

已知數列 $\langle a_n \rangle = \left\langle \left(\frac{5x}{4x-3} \right)^n \right\rangle$ ，且 $4x-3 \neq 0$ ，請回答下面問題：

16. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則 $\frac{5x}{4x-3}$ 會落在下列哪個區間？（單選題，4 分）

- (1) $(-1, 1)$
- (2) $[-1, 1)$
- (3) $(-1, 1]$
- (4) $[-1, 1]$

17. 若無窮級數 $\frac{5x}{4x-3} + \left(\frac{5x}{4x-3} \right)^2 + \left(\frac{5x}{4x-3} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{5x}{4x-3} \right)^n + \cdots$ 為收斂級數，求出 x 的範圍。（非選擇題，6 分）

18. 甲、乙兩人輪流投擲兩粒公正骰子，先擲出點數和大於 9 的人獲勝，已知甲先投擲，則甲獲勝的機率為何？(非選擇題，6 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 15 2. 24 3. 15

4. $\{x \mid x \leq -3, x \in \mathbb{R}\}$

5. $\frac{3}{2}$

6. -2

7. $\frac{1}{25}$

8. $\frac{1}{2}$

9. 4

10. $f(x) = 2x - 7$

11. 0

12. 1

13. 50

14. (4, 5)

15. $-\frac{1}{5}$

第貳部分：混合題

16. 3

17. $-3 < x < \frac{1}{3}$

18. $\frac{6}{11}$