

高雄市高雄女中 112 上高三第二次期中考

一、多選題

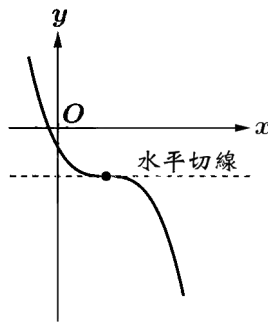
說明：第 1 題至第 4 題。

1. 已知 $f(x)$ 為可微分的偶函數，且 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 也皆為可微分函數，則下列選項當中何者必為真。

- (1) $f(0) = 0$
- (2) $f'(x) = 0$
- (3) $f''(x) = 0$
- (4) $f'(x) = f'(-x)$
- (5) $f''(x) = f''(-x)$

2. 函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形如圖所示，虛線為過對稱中心之切線。以下關於係數 a 、 b 、 c 、 d 的敘述何者正確？

- (1) $a < 0$
- (2) $b < 0$
- (3) $c < 0$
- (4) $d < 0$
- (5) $b^2 - 4ac < 0$



3. 已知 $f(x)$ 為三次多項式函數，且 $y = f'(x)$ 圖形的對稱軸為 $x = 1$ ，試選出正確的選項。

- (1) $f(1) = 0$
- (2) $f'(1) = 0$
- (3) $f''(1) = 0$
- (4) $f'(x) = 0$ 有兩相異實根，則 $f'(1) \times f''(1) < 0$
- (5) $f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的一次近似為 $g(x) = f'(1)x + f(1)$

4. 有一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{g(a_n)}$ ，其中 n 為自然數，且 $f(x)$ 為可微分函數，試選出正確選項。

(1) 若對所有實數 x 皆滿足 $g(x) = f'(x) \neq 0$ ，則 a_{n+1} 即為以 $(a_n, f(a_n))$ 為切點作 $y = f(x)$ 的切線的 x 截距

(2) 若 $f(x) = -x^2 + 4x$ 、 $g(x) = f'(x)$ ，且 $a_1 = 1$ 時，則數列 $\langle a_n \rangle$ 為遞減數列，即 $a_{n+1} \leq a_n (n \in \mathbb{R})$

(3) 若已知 a_1, a_2 為相同的實數，且滿足 $g(a_1) \neq 0$ 時，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$

(4) 若 $f(x) = x^3 - 3x + 3$ 、 $g(x) = 3x^2 - 3$ 、 $a_1 = \frac{3}{2}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 為 $f(x) = 0$ 的實根

(5) 已知對所有 $x \in [a, b]$ ，滿足 $g(x) = f'(x) > 0$ 且 $g'(x) > 0$ ，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > a_1$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 大於 $\langle a_n \rangle$ 中的任一項

二、填充題

說明：第 5 題至第 17 題。

5. 設函數 $f(x) = x(x+1)(x^2+x+1)$ ，求 $f(x)$ 在 $x = -1$ 處的導數【 】。

6. 設曲線 $\Omega: y = 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$ ，求 Ω 的所有反曲點坐標【 】。

7. a 為正數，且函數 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4ax^2 + 15a^2x$ 的極大值減去極小值的差為 $\frac{1}{6}$ ，求 $a =$ 【 】。

8. 有一個三次實係數多項式函數 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$ ，若 $y = f(x)$ 的圖形通過 $(0, 0)$ ，且函數極值發生在 $x = \pm 2$ 處，則 $a + b + c =$ 【 】。

9. 已知 $3x + y = 2$ 為 $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ 上的一條切線，則切點 x 坐標為【 】。

10. 已知 $f(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 3$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(-1+3h)}{h} =$ 【 】。

11. 小文在 $[0, 8]$ 上定義了一個函數 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{當 } 0 \leq x \leq 1 \\ -2 \left| \frac{(x-3)^2}{x-3} \right| + 5, & \text{當 } 1 < x \leq 4 \text{ 且 } x \neq 3 \\ 4, & \text{當 } x = 3 \\ \log_2 x, & \text{當 } 4 < x \leq 8 \end{cases}$ ，並觀察其極

值。

(1) $f(x)$ 的極大值當中，最大的極大值為【 】。

(2) $f(x)$ 的極小值當中，最大的極小值為【 】。

12. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。今有一函數 $f(x) = \sin 5x$ ，函數 $f(x)$ 的圖形在以 $(0, 0)$ 為切點的切線方程式為 $y = mx + k$ ，求數對 $(m, k) =$ 【 】。

13. 設 $h(x) = g(2x - 1)$ 且 $h'(x) = 64x^3 - 144x^2 + 96x - 18$ ，
求 $g'(x) =$ 【 】。(降冪排列)

14. 若實係數方程式 $-x^3 - 3x^2 + 24x + d = 0$ 有三個相異實根，
則實數 d 的範圍為【 】。

15. 設函數 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$ ，函數的極小值發生在 $x = a$ 、 c 兩處，極大值發生在 $x = b$ ，其中 $a < b < c$ 。

(1) 過 $A(a, f(a))$ 、 $B(b, f(b))$ 兩點的直線 AB 方程式 $y = mx + k$ ，求 $(m, k) =$ 【 】。

(2) 承 (1)，已知有一反曲點 P 的 x 坐標為 α 且 $\alpha \in (a, b)$ ，請問直線 AB 是否通過該反曲點？
【 】。(單選題)

(A) 直線 AB 通過反曲點 P

(B) 直線 AB 不通過反曲點 P ，且直線 AB 在反曲點 P 的上方，即 $m\alpha + k > f(\alpha)$

(C) 直線 AB 不通過反曲點 P ，且直線 AB 在反曲點 P 的下方，即 $m\alpha + k < f(\alpha)$

(D) 不只一個反曲點的 x 坐標在 (a, b) 上，故無法判斷

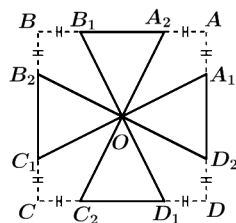
16. 若兩曲線在交點 P 的切線相同，則稱它們相切於點 P 。設函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的圖形和圓 $\Omega: x^2 + y^2 = 25$ 相切於 $(4, 3)$ 和 $(-4, 3)$ 兩點，試回答以下問題：

(1) 求 $f(x)$ 在 $x = 4$ 處的導數【 】。

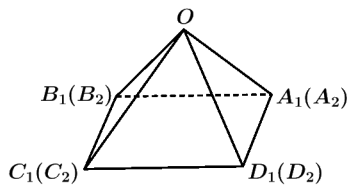
(2) 求 $f(x)$ 的最高次項係數 $a =$ 【 】。

17. 如圖(一)，今有一個邊長為 2 單位的正方形 $ABCD$ 紙板，文儀想用紙板做出底面為正方形的角錐，所以在紙板的四個角分別剪去四個全等的鳶形 A_1AA_2O 、 B_1BB_2O 、 C_1CC_2O 、 D_1DD_2O 後，將四個等腰三角形的邊兩兩接合後，便得到四角錐 $O-A_1B_1C_1D_1$ (如圖(二))，請問這樣做法下，得到的角錐體積最大值為【 】立方單位。

註：角錐體積 = $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$



圖(一)



圖(二)

参考答案

1. 5

2. 1345

3. 3

4. 13

5. -1

6. $\left(\frac{5}{9}, -\frac{1870}{243}\right)$

7. $\frac{1}{2}$

8. -4

9. 0

10. 46

11. (1) 3 ; (2) 4

12. (5, 0)

13. $4x^3 - 6x^2 + 1$

14. $-28 < d < 80$

15. (1) (8, 4) ; (2) C

16. (1) $-\frac{4}{3}$; (2) $-\frac{1}{6}$

17. $\frac{8\sqrt{3}}{27}$