

台中市文華高中 112 上高二第二次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 88 分）

一、單選題（占 15 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 5 分。

1. $a = \log_3 1$ 、 $b = \log_3 (-2)$ 、 $c = \log_1 1$ 、 $d = \log_{(-2)} (-8)$ 、 $e = \log_2 0$ ，則 a 至 e 中，有意義的有幾個？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

2. 下列各數之中，比 1 大的共有幾個？

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}, \log_{\frac{1}{8}} 4, \log_2 3, \sqrt{10}^{\log 2}, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

3. 設 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 3$ ， $-1 \leq x \leq 1$ ，若 $f(x)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m = ?$

- (1) -6
- (2) $-6\frac{1}{4}$
- (3) $-6\frac{1}{2}$
- (4) $-6\frac{3}{4}$
- (5) -7

二、多選題（占 30 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

4. 關於指數函數圖形的描述，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ 和 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 的圖形對稱 y 軸

(2) 設 $a \in \mathbb{R}$ ， $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，則 $y = a^x$ 的圖形都是凹口向上

(3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = -2^x$ 的圖形對稱於原點

(4) 可利用 $y = 2^x$ 的圖形向左平移得到 $y = 5 \times 2^x$ 的圖形

(5) 可利用 $y = 10^x$ 的圖形以 y 軸為中心沿水平方向伸縮得到 $y = 2^x$ 的圖形

5. 關於指數、對數函數圖形的描述，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $y = 2^x$ 和 $y = \log_2 x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$

(2) $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形對稱於 y 軸

(3) 設 $a \in \mathbb{R}$ ， $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，則 $y = \log_a x$ 的圖形必為凹口向上的圖形

(4) $y = \log x$ 和 $y = \log \frac{1}{x}$ 的圖形對稱於 x 軸

(5) 將 $y = \log_2 x$ 的圖形向右平移 4 單位，再向上平移 1 單位，會得到 $y = \log_2(2x - 8)$ 的圖形

6. 下列哪些選項是正確的？

(1) $\log(2 + 3) = \log 2 \times \log 3$

(2) $\sqrt{\left(\log \frac{1}{2}\right)^2} = \log \frac{1}{2}$

(3) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2} = \log_{(2^3)} 2^2$

(4) $(\log_2 3)^4 = 4 \log_2 3$

(5) $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$

7. 下列哪些選項的圖形和 $y = x$ 恰交一點？

(1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(2) $y = \log_2 x$

(3) $y = 2^{x-1}$

(4) $y = 2^{-|x|}$

(5) $y = |\log_{0.5} x|$

8. 已知 $\log 2 \approx 0.301$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1) $\log 12^{20} \approx 21.582$

(2) $\log 12^{20}$ 的首數為 21 且尾數約為 0.582

(3) 12^{20} 展開後為 21 位數

(4) 12^{20} 展開後最高位數字為 4

(5) 12^{20} 展開後的個位數字為 4

三、填充題（占 45 分）

說明：第 9 題至第 17 題，每題 5 分。

9. 設 α 、 β 為 $4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$ 的兩根，則 $\alpha + \beta = \underline{\underline{9-1}}$ 。

10. 滿足不等式 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 15 < 0$ 的所有整數解之和為 $\underline{\underline{10-1}} \underline{\underline{10-2}}$ 。

11. $\frac{\log_2 10}{\log_2 5} - \frac{\log_3 2}{\log_3 5} + 3 \log 2 + \log 11 - \frac{1}{2} \log \frac{49}{25} + \log \frac{35}{22} = \underline{\underline{11-1}}$ 。

12. 若方程式 $2 \log_2 x + \log_x 8 = 7$ 的兩根為 α 、 β ，且 $\alpha < \beta$ ，則 $\frac{\log \alpha}{\log \beta} = \frac{\underline{\underline{12-1}}}{\underline{\underline{12-2}}}$ 。

13. 若不等式 $\log_{\sqrt{2}}(x+3) \leq \log_2(12x+1)$ 的解為 $a \leq x \leq b$,

則數對 $(a, b) = (\underline{13-1}, \underline{13-2})$ 。

14. 設 $0 \leq x \leq 3$, 若 $f(x) = \log(x^2 - 2x + 3)$ 的最大值為 M , 最小值為 m , 且 $M + m = \log a$, 則

$a = \underline{14-1} \underline{14-2}$ 。

15. 已知 $\log 2 \approx 0.301$, 若 $\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$ 表示為純小數時, 小數點後第 n 位開始出現非 0 的數字, 且第 1 個

非 0 的數字為 k , 則數對 $(n, k) = (\underline{15-1} \underline{15-2}, \underline{15-3})$ 。

16. 小華某天收到投資詐騙訊息, 對方宣稱每天可以穩定獲利 10%, 若小華投入 100 萬台幣, 依照宣稱的獲利複利計算, 從開始投資後就不領出, 則至少 $\underline{16-1} \underline{16-2} \underline{16-3}$ 天後小華的 100 萬台幣利滾利可以超過 6 兆台幣, 超越特斯拉創辦人 Elon Musk (根據彭博億萬富豪排行榜, 馬斯克於 2023 年 5 月底身價達到 1,923 億美元重返世界首富, 計算方便起見, 我們以 6 兆台幣計算)

($\log 2 \approx 0.301$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 1.1 \approx 0.0414$)

17. 方程式 $\log_2 x^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x+4) = 0$ 有 $\underline{17-1}$ 個小於 0 的解

第貳部分：混合題 (占 10 分)

說明：本部分共有 1 題組, 每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答, 更正時, 應以橡皮擦擦拭, 切勿使用修正液 (帶)。非選擇題由左而右橫式書寫, 作答時必須寫出計算過程或理由, 否則將酌予扣分。

18 — 20 題組

當溶液的氫離子濃度為 x 莫耳/升時, 此溶液的 pH 值為 $-\log x$ 。若有一杯酸性溶液 A 的 pH 為 4, 另一杯酸性溶液 B 的 pH 為 5, 現在取 A 溶液 1 公升、 B 溶液 4 公升混合, 試回答下列各小題。

($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$)

18. A 溶液的氫離子濃度為何? (非選擇題, 1 分)

19. B 溶液的氫離子濃度為何? (非選擇題, 1 分)

20. 取 A 溶液 1 公升、 B 溶液 4 公升混合後的 pH 為何? (四捨五入到小數點後第二位) (非選擇題, 8 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 1 2. 3 3. 5

4. 12345 5. 145 6. 35 7. 145 8. 12

9. 1

10. -6

11. 3

12. $\frac{1}{6}$

13. (2, 4)

14. 12

15. (70, 1)

16. 164

17. 2

第貳部分：混合題

18. 10^{-4} 莫耳/公升

19. 10^{-5} 莫耳/公升

20. 4.55