

# 高雄市高雄女中 112 上高三第一次期中考

## 一、多選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

1. 判斷下面個無窮數列中，哪些是發散數列？

(1)  $\left\langle \left(-\frac{11}{3\pi}\right)^n \right\rangle$

(2)  $\left\langle \frac{3n}{n+5} \right\rangle$

(3)  $\left\langle \left(\log \frac{3}{2}\right)^n \right\rangle$

(4)  $\left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$

(5)  $\left\langle \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right) \right\rangle$

2. 關於函數  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$ ，試選出正確的選項：

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在

(2)  $f(x)$  在  $x = 2$  連續

(3)  $f(x)$  在  $x = 2$  不連續

(4)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

(5)  $f(x)$  在  $x = 1$  連續

3. 下列選項何者正確？(其中符號  $[ ]$  為高斯符號)

(1) 無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1})$  為收斂級數

(2) 數列  $\left\langle \frac{1}{n} \left[ \frac{6}{5}n \right] \right\rangle$  為收斂數列

(3) 已知  $\theta = \sqrt{101}$ ， $n$  為正整數，若  $a_n = n \left[ \frac{-\theta}{n} \right]$ ，則數列  $\langle a_n \rangle$  收斂

(4) 若無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收斂，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(5)  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$  在 1 與 2 之間有一個實根

4. 下列選項何者正確？(其中符號  $[ ]$  為高斯符號)

(1) 函數  $f_1(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，在  $x = 0$  處連續

(2) 函數  $f_2(x) = \sqrt{x}$ ，在  $x = 0$  處連續

(3) 函數  $f_3(x) = [1 - 2x]$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 1.5} f_3(x)$  存在

(4) 函數  $f_4(x) = x^3 + x$  為一對一函數且為奇函數

(5) 函數  $f_5(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 0} f_5(x) = 2$

## 二、填充題 (占 80 分)

說明：第 5 題至第 18 題。

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

6. (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

(2) 求無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

7. 若首項為  $a$ ，公比為  $0.19$  的無窮等比級數和等於循環小數  $1.\bar{3}$ ，則  $a =$ 【                      】。

8. (1) 設函數  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  ,  $g(x) = \sqrt{x}$  ,

求商函數  $\frac{f}{g}$  的定義域為【                      】。

(2)  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$  ,  $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$  ,

求合成函數  $g \circ f$  的值域為【                      】。

9. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^{12} - 1}{x} =$  【      】。

10. 若  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + ax + b} = \frac{4}{13}$ ，則數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 已知  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|-12 + 7x - x^2| + a}{x - 2} = b$ ，則數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 已知  $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$ ，求無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{4^n} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

13. 已知三次多項式  $f(x)$  滿足  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ ,

則  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-3} = \text{【 } \quad \text{】} \circ$

14. 將函數  $f(x) = \log_2 x$  的圖形向上平移 3 單位，再向左平移 4 單位，得到  $g(x)$ ，再求函數  $g(x)$  的反函數  $g^{-1}(x) = \boxed{\hspace{2cm}}$ 。

15. 若無窮數列  $\left\langle \left( \frac{2x}{x-1} \right)^n \right\rangle$  收斂，則實數  $x$  之範圍為【                      】。

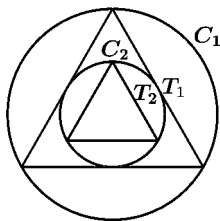
16. 設  $n$  為正整數，若  $x^{n+1}$  除以  $(x^2 - 5x + 6)$  所得餘式為  $r(x)$ ，

則極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(0)}{r(-1)} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

17. 設兩數列  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數  $n$  都滿足  $b_n + \frac{4n-3}{n} \leq a_n \leq 3b_n$ 。

已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

18. 如下圖，設  $C_1$  為單位圓， $T_1$  為  $C_1$  之內接正三角形， $C_2$  為  $T_1$  之內切圓， $T_2$  為  $C_2$  之內接正三角形，依此類推 $\cdots$ 。令  $a_n$  表  $T_n$  之面積，則  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。



### 參考答案

1. 15      2. 345      3. 1245      4. 45

5. 0

6. (1)  $\frac{1}{2}$  ; (2) 1

7. 1.08

8. (1)  $0 < x \leq 3$  ; (2)  $-2 \leq g(f(x))$

9. -12

10. (7, -30)

11. (-2, -3)

12.  $\frac{4}{3}$

13. 48

14.  $2^{x-3} - 4$

15.  $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$

16.  $\frac{2}{3}$

17. 2

18.  $\sqrt{3}$