

台北市師大附中 112 上高三第二次期中考

一、多選題（占 40 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

1. 選出下列函數哪些在 $x = 0$ 處導數存在？

(1) $f(x) = |x|$

(2) $f(x) = |x^3|$

(3) $f(x) = |x(x+1)|$

(4) $f(x) = \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor$ ，其中 $[x]$ 表 x 之高斯符號

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 0 \\ x^4 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$

2. 已知函數 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ ，選出下列正確的敘述。

(1) 當 $-2 \leq x \leq 1$ 時， $f(x)$ 是遞增函數

(2) 當 $1 \leq x \leq 2$ 時， $f(x)$ 是遞減函數

(3) 當 $x = 1$ 時， $f(x)$ 有極大值 -7

(4) 當 $x \leq -\frac{1}{2}$ ， $y = f(x)$ 圖形的凹口向下

(5) 當 $x \geq -\frac{1}{2}$ ， $y = f(x)$ 圖形的凹口向上

3. 設 $f(x)$ 是定義在實數上的三次多項式函數，選出下列正確的敘述。

(1) $f(x)$ 是連續函數

(2) $f(x)$ 不一定是可微分函數

(3) 若 $f'(\alpha) = 0$ ，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ ，則 $f(\alpha)$ 必是 $f(x)$ 的極大值或極小值

(4) 若 $f''(\alpha) = 0$ ，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ ，則 $(\alpha, f(\alpha))$ 必是 $y = f(x)$ 的反曲點

(5) 若 $y = f(x)$ 有極大值，則 $y = f(x)$ 必有極小值

4. 設導函數 $y = f'(x)$ 的圖形開口向下且頂點為 $A(1, 2)$ 的拋物線，選出下列正確的敘述。

- (1) $f(x)$ 必是三次多項式函數
- (2) $f(x)$ 在 $x \leq 1$ 的範圍是遞增函數，在 $x \geq 1$ 的範圍是遞減函數
- (3) 函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $x \leq 1$ 時是凹口向下，在 $x \geq 1$ 時是凹口向上
- (4) $f(x)$ 必有極大值和極小值
- (5) 點 $A(1, 2)$ 是 $y = f(x)$ 圖形的反曲點

5. 設 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ ， $\int_1^2 f(x) dx = a$ ， $\int_2^3 f(x) dx = b$ ， $\int_1^3 f(x) dx = c$ ，選出下列正確的敘述。

- (1) $a = b$
- (2) $a + b = c$
- (3) $a \geq c$
- (4) 函數 $y = f(x)$ 的圖形和 x 軸所圍成封閉區域的面積為 $a + b$
- (5) $\int_0^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx$

二、填充題（占 60 分）

說明：第 6 題至第 15 題，每格 5 分。

6. 已知函數 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{3h} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 若 $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2+1}$ ，則 $f'(0)$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} ax+b & , x \geq 1 \\ x^3 & , x < 1 \end{cases}$ ，若在 $x=1$ 處有導數，則

(1) 數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\int_{-1}^3 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 已知多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的二階導函數 $f''(x) = 6x - 4$ 且 $f'(1) = -1$ ， $f(2) = 2$ ，則數對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 已知 a 、 b 、 c 皆為實數，若兩曲線 $y = x^2 + ax + b$ 與 $y = -x^3 + c$ 在點 $A(-1, 2)$ 有共同的切線 $L: y = mx + k$ ，則

(1) 數對 $(a, b, c) =$ 【 】。

(2) 數對 $(m, k) =$ 【 】。

11. 有一質點從平面坐標的原點 $(0, 0)$ 開始移動，每次移動一單位，每次往右移動的機率為 p ($0 < p < 1$)，而往上移動的機率為 $1 - p$ ，當質點移動到直線 $x = 4$ 或直線 $y = 4$ 時，就停止移動。設該質點移動經過點 $(2, 2)$ 或點 $(2, 3)$ 的機率為 $f(p)$ ，則當 $p =$ 【 】時， $f(p)$ 有最大值。

12. 若兩函數圖形 $\Gamma_1: y = x^3 + x^2$ 和 $\Gamma_2: y = x^2 + 3x - a$ 有三相異交點，則實數 a 範圍為【 】。

13. 求值： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2} \right] =$ 【 】。(化為最簡分數)

14. 已知 $f(t) = 12t^3 - 12t^2$ 且 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ，則 $F(x)$ 的最小值為【 】。

15. 若二次多項式函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 滿足下列三條件：

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$

(2) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$

(3) $\sum_{n=1}^5 f(n) = 70$ ，其中 n 為正整數

，則數對 $(a, b, c) =$ 【 】。

參考答案

1. 245 2. 24 3. 145 4. 14 5. 235

6. -1

7. -4

8. (1) $(3, -2)$ ；(2) 8

9. $(1, -2, 0, 2)$

10. (1) $(-1, 0, 1)$; (2) $(-3, -1)$

11. $\frac{13 - \sqrt{69}}{10}$

12. $-2 < a < 2$

13. $\frac{1}{2}$

14. -1

15. $(2, -3, 1)$