

市立臺中一中 112 學年度第一學期第二次期中考 高三數學甲 試題

三年_____班_____號 姓名：_____

※未正確畫記班級、姓名、座號扣 10 分

科目代碼：03

一、單選題：(占 6 分)

說明：有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ ，則 $2a + 3b$ 為
(1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) -1 (5) -2 。

二、多選題 (占 40 分)

說明：第 2 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，所有選項均答對者，得 10 分；答錯 1 個選項者，得 8 分；答錯 2 個選項者，得 6 分；答錯 3 個選項者，得 4 分，答錯多於 4 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

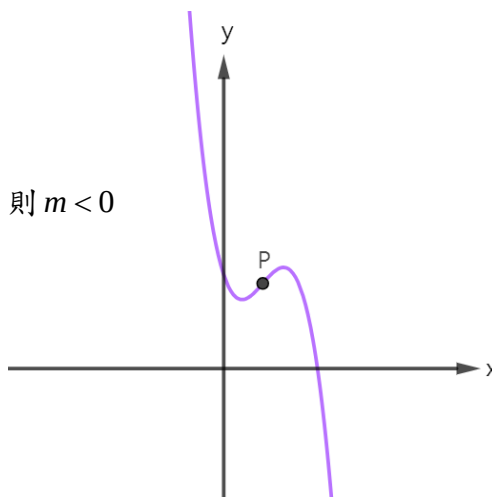
2. 設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$ ，則以下哪些選項正確？
(1) $\int_{-3}^0 f(x)dx > 0$ (2) $\int_0^5 f(x)dx > 0$ (3) $\int_{-3}^5 f(x)dx > 0$ (4) 方程式 $f(x) - 10 = 0$ 有 3 相異實根。
(5) 若 $x > 3$ ，則 $x^3 - 2x^2 > 15x - 36$
3. 設 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ ， a, b 皆為實數，請選出正確的選項。
(1) 若 $y = f(x)$ 有極值，則 $a > \frac{4}{3}$
(2) 若 $y = f(x)$ 恆為遞增函數，則 $a \leq \frac{4}{3}$
(3) 若 α, β 均介於 1 與 2 之間且 $\alpha \neq \beta$ ，則 $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} > f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$
(4) 若 $y = f(x)$ 反曲點的 y 坐標為 $\frac{4}{27}$ ，則 $2a - 3b = \frac{4}{3}$
(5) 若 $f(x) = 0$ 有二重根 -1 ，則 $a + b = 1$

4. 下列哪些選項的值為 $\int_0^2 x^4 dx$?

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} [0^4 + (\frac{2}{n})^4 + (\frac{4}{n})^4 + \cdots + (\frac{2n-2}{n})^4]$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} [(\frac{2}{n})^4 + (\frac{4}{n})^4 + (\frac{6}{n})^4 + \cdots + (\frac{2n}{n})^4]$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (2n-1)^4}{n^5}$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (2n)^4}{n^5}$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} [(\frac{1}{n})^4 + (\frac{3}{n})^4 + (\frac{5}{n})^4 + \cdots + (\frac{2n-1}{n})^4]$

5. 已知 a, b, c 為實數，且三次函數 $y = f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ 的圖形如右圖所示，若 P 點為 $y = f(x)$ 的反曲點，請選出正確的選項。

- (1) $a > 0$
- (2) $c < 0$
- (3) 若 $y = f(x)$ 的圖形在反曲點的一次近似為 $y = mx + k$ ，則 $m < 0$
- (4) $4a + b > 0$
- (5) $y = ax^2 + bx + c$ 的頂點 x 坐標大於 -1



三、選填題（占 54 分）

說明：1. A 至 I 題，請依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。
2. 每格完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (4t^2 + t - 3) dt = \underline{\textcircled{6}}$ 。

B. 設函數 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 4x$ ，則 $f'(-1)$ 的值為 ⑦。

C. 已知多項式函數 $y = x \cdot f(x)$ 的圖形在 $x = 3$ 附近的一次近似為 $y = 2x + 9$ ，則 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 附近的一次近似為 $y = \underline{\textcircled{8}x + \textcircled{9}}$ 。

D. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x = 1$ 有極大值 3，且圖形 $y = f(x)$ 在切點 $(4, f(4))$ 之切線方程式為 $y - f(4) + 5(x - 4) = 0$ ，試問 $\int_1^4 f''(x) dx$ 之值為 ⑩⑪。

E. 已知 $y = f(x) = x^3 + ax^2 + 6$ ， $P(3, b)$ 為 $y = f(x)$ 圖形上一點且以 P 為切點的切線斜率為 9，若過 P 點且與 $y = f(x)$ 相切的另一條切線方程式為 $y = mx + k$ ， $m \neq 9$ ，

則數對 $(a, b, m, k) = \underline{(\textcircled{12}, \textcircled{13}, \textcircled{14}, \textcircled{15}, \textcircled{16})}$ 。

F. 已知多項式函數 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的切線斜率為 2，且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + \frac{1}{2}h) - f(a + k \cdot h)}{h} = \frac{1}{5}$ ，則

$$k = \frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}}。$$

G. 已知一球半徑為 1，則此球外切直圓錐的最小體積為 $\frac{\textcircled{19}}{\textcircled{20}} \pi$ 。

H. 已知整係數多項式 $f(x)$ 滿足 $x^2 f(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2 \int_0^x t f(t) dt$ ，且 $f(0) = 0$ ，

求 $f(7)$ 為 $\textcircled{21}\textcircled{22}\textcircled{23}$ 。

I. 已知三次多項式函數 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 時有極大值，在 $x = 3$ 時有極小值，且 $f(x) = 0$ 有三相異實根，其中最小根為 α ，最大根為 β ，若 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ ，則 $\alpha^2 + \beta^2 = \underline{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。

市立臺中一中 112 學年度第一學期第二次期中考 高三數學甲 試題

一、單選題：

1. (3)

二、多選題：

2. (1)(4)(5) 3. (3)(4)(5) 4. (1)(2)(3)(4)(5) 5. (2)(5)

三、選填題：

A. 2 B. 2 C. $-x+8$ D. -5 E. $(-3, 6, 0, 6)$ F. $\frac{2}{5}$ G. $\frac{8}{3}\pi$ H. 434

I. 14