

台中市台中女中 112 下高二期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 85 分）

一、多選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 10 分。

1. 設 A 、 B 、 C 皆為二階方陣， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試選出所有正確的選項。

- (1) 若 $A^2 = B^2$ ，則 $A = B$ 或 $A = -B$
- (2) 若 $A^2 = I$ ，則 $(AB)^2 = B^2$
- (3) 若 $\det A \neq 0$ ，則 $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$
- (4) 若 $\det A \neq 0$ 且 $BA = AC$ ，則 $B = C$
- (5) 若 A 為轉移矩陣，則 A^2 和 A^{-1} 皆為轉移矩陣

2. 設 a 、 b 為實數，已知空間中三向量 $\vec{u} = (1, -1, 2)$ 、 $\vec{v} = (a, 1, 1)$ 、 $\vec{w} = (-5, 2, 5)$ ，若欲將向量 $(5, 2, b)$ 表示成 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 的線性組合，即 $(5, 2, b) = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ ，其中 x 、 y 、 z 為實數，試問下列哪些選項正確？

- (1) 若 $a = -1$ ，則 x 、 y 、 z 恰有一解
- (2) 若 $b \neq -25$ ，則 x 、 y 、 z 必無解
- (3) 若 x 、 y 、 z 有解，則 $a = -2$
- (4) 若 x 、 y 、 z 恰有一解，則三向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 必不共平面
- (5) 若三向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 共平面，則 x 、 y 、 z 必無限多解

1

二、填充題（占 65 分）

說明：第 3 題至第 12 題，每格 5 分。

3. 設 a 、 b 、 c 為實數， I 為二階單位矩陣，已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & b \\ a & c \end{bmatrix}$ 為轉移矩陣，且矩陣 $A + \frac{1}{2}I$ 沒有反矩陣，則 c 之值為【 】。

4. 設 A 為二階方陣，且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $A \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $A = \text{【 】}$ 。

5. 設 a 、 b 、 c 、 d 為實數， M 為一階矩陣 3×2 矩陣，且 $M \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ，

$M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $M \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \text{【 】}$ 。

6. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ ，其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標， $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標。

平面上三點 $A(0,0)$ 、 $B(r,s)$ 、 $C(2,4)$ 經上面的坐標變換分別變換成 A' 、 B' 、 C' 三點，已知 B' 點的新坐標為 $(1,-12)$ ，則

(1) 數對 $(r,s) = \text{【 】}$ 。

(2) $\triangle A'B'C'$ 的面積為【 】。

7. 平面上一定點 $A(-2,1)$ 先對直線 $3x+y=0$ 作鏡射後，再沿 x 軸方向推移 y 坐標的 4 倍後的點坐標為【 】。

8. 已知 a 、 b 為實數，且方程組 $\begin{cases} ax - y + 5z = 5 \\ x + ay + 2z = 1 \\ 4x + 3y + az = 14 \end{cases}$ 恰有一組解，又此方程組經過一系列的高斯消去

法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & & & 2 \\ -3 & & & 6 \\ 1 & & & 3 \end{array} \right]$ 。則 $a = \text{【 】}$ 。

9. 設 a 、 b 為實數， I 為二階單位矩陣，已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

滿足 $A = 2I + B$ ，若 $A^7 = \begin{bmatrix} r & t \\ s & u \end{bmatrix}$ ，則 $t = \text{【 】}$ 。

10. 在某場籃球比賽後，經教練最後的統計資料如下：球員小明包含罰球、二分之一球、三分球總共出手 50 次，罰球命中率 9 成、二分之一球命中率 8 成、三分球命中率 9 成，三者合計出手的命中率为 8 成 6，已知罰進一球得 1 分，投中兩分球得 2 分，投中 3 分球得 3 分，小明在這場比賽中共得 95 分。試問小明此場比賽中三分球共出手【 】次。

11. 一箱中有 4 顆紅球且箱外有 1 顆紅球、1 顆白球，從箱中取球時每球被取到的機率相等。每一回合做如下的操作：每次自箱中任意取出兩球，再把箱外的另兩球放入箱中。設操作 n 回合後，白球在箱外的機率為 a_n ，白球在箱內的機率為 b_n ，求

(1) 若二階方陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，則矩陣 $A = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$ 。

(2) 試求操作四回合後，白球在箱內的機率為【 】。

12. 已知 $a、b$ 為實數， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 滿足 $A = 5I - 3A^{-1}$ ，則

(1) 數對 $(a, b) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$ 。

(2) $2A^4 - 11A^3 + 7A^2 + 17A - 14I = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$ 。

第貳部分：混合題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

13 — 15 題組

以 T 表由 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 定義的平面線性變換，其中 $a、b$ 為實數。試回答下列問題。

13. 若 T 將直線 $x - 2y + 6 = 0$ 上的點都映射到直線 $3x - y + 12 = 0$ 上，試求 $a、b$ 。（非選擇題，5 分）

14. 設 O 為原點，已知 T 將不共線的三點 $A、B、C$ 映射至點 $A'、B'、C'$ ，即 $A' = T(A)、B' = T(B)、C' = T(C)$ ，試選出正確的選項。（多選題，5 分）

(1) T 為旋轉矩陣

(2) $\angle ABC = \angle A'B'C'$

(3) $\overline{A'B'} = \overline{AB}$

(4) $\triangle A'B'C'$ 面積 = $\triangle ABC$ 面積

(5) 若 $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}$ ，則 $\overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OA'} + 4\overrightarrow{OB'}$

15. 試求點 $P(5, -1)$ 經過 T 線性變換 20 次後的點坐標。(非選擇題，5 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 3 2. 14

3. $\frac{3}{10}$

4. $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

6. (1) $(-5, 1)$; (2) 55

7. $(9, 2)$

8. 3

9. 2240

10. 20

11. (1) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; (2) $\frac{5}{8}$

12. (1) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$; (2) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

第貳部分：混合題

13. $a = 1, b = -1$

14. 25

15. $(-5120, 1024)$