

新竹市新竹高中 112 上高三第二次期中考 3 甲 (理)

第壹部分：選擇（填）題（占 83 分）

一、單選題（占 10 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1. 關於複數 $z = ai + b$ ，其中 a, b 為實數。則下列選項何者正確？

- (1) z 不是實數
- (2) $z - \bar{z}$ 不是實數
- (3) z 不等於 $\bar{z}$
- (4) $z \times \bar{z}$ 是實數
- (5) $\bar{z} = ai - b$

2. 設 $x^2 - (3 + i)x + 4 = 0$ 的兩根為 α, β ，則下列選項何者正確？

- (1) α 的共軛複數為 β
- (2) $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$
- (3) $\alpha\beta \notin \mathbb{R}$
- (4) $\alpha = 1 + i$
- (5) $\alpha = 1 - i$

二、多選題（占 18 分）

說明：第 3 題至第 5 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

3. 已知 α, β 為方程式 $x^2 + 8x + 4 = 0$ 之兩根，其中 $\alpha > \beta$ ，試問下列哪些選項正確？

- (1) $\alpha + \beta > 0$
- (2) $\alpha\beta > 0$
- (3) $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta} > 0$
- (4) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \geq 0$
- (5) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} > 0$

4. 設兩複數 z_1 、 z_2 滿 $|z_1 + 1 + i| = R$ ， $|z_2 - 2 - 3i| = 2$ ，若 $|z_1 - z_2|$ 的最大值為 M 、最小值為 m ，試問下列哪些選項正確？

- (1) 若 $R = 2$ ，則 $m + M = 10$
- (2) 若 $R = 3$ ，則 $m + M = 10$
- (3) 若 $R = 6$ ，則 $m + M = 13$
- (4) 若 $R = 7$ ，則 $m + M = 14$
- (5) 若 $R = 8$ ，則 $m + M = 16$

5. 設 P 、 Q 為複數平面上的兩點，分別對應到複數為 z 、 w ，且 $\overline{w} = (\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)(iz + i)$ ，則下列哪些動作會將 P 點移動到 Q 點？

- (1) 向右 1 單位後以原點為中心逆時針旋轉 30° ，最後對稱實軸
- (2) 對稱實軸後，向右 1 單位再以原點為中心逆時針旋轉 30°
- (3) 對稱實軸後，向左 1 單位再以原點為中心順時針旋轉 30°
- (4) 以原點為中心逆時針旋轉 90° 後向上 1 單位，接著以原點為中心順時針旋轉 60° 後再對稱實軸
- (5) 以原點為中心逆時針旋轉 90° 後向上 1 單位，接著以原點為中心逆時針旋轉 60° 後再對稱虛軸

二、填充題（占 55 分）

說明：第 6 題至第 13 題。

答對題數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
共得分數	0	8	16	23	30	36	42	47	51	55

6. 設 $f(x) = x^5 - 6x^2 - 10$ ， $g(x) = x^3 + 5x - 2$ ，已知存在唯一實數 c 介於連續整數 n 與 $n + 1$ 之間使得 $f(c) = g(c)$ ，求 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. $\alpha = \frac{1 + 2\sqrt{2}i}{3}$ 為方程式 $x^2 + kx + 2 = 0$ 的一根，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 若 $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^6 - 3(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^5 + 5(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^4 + (\frac{1-i}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{1-i}{\sqrt{2}}) + 4 = a + bi$ ，其中 a, b 為實數，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 設方程式 $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16 = 0$ 的四個複數根為 $r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, 其中 $r_k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_4 < 2\pi$, 試求下列各小題：

(1) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

(2) $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

10. 設 $z = (1+i)(1+\frac{i}{\sqrt{2}})(1+\frac{i}{\sqrt{3}})(1+\frac{i}{\sqrt{4}}) \cdots (1+\frac{i}{\sqrt{119}})(1+\frac{i}{\sqrt{120}})$,

求 $|z| = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

11. 複數 z 滿足 $|z| = 2$, 求 $|(3+4i)z + (3-4i)\bar{z}|$ 的最大值為 $\text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

12. 設方程式 $(z-i)^7 = i$ 的七個複數根在複數平面上依序對應到 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 七個點, 試求 $\overline{P_0P_1} \times \overline{P_1P_3} \times \overline{P_3P_6} = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

13. 計算 $\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4} + \cdots + \frac{100}{i^{100}} = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

第貳部分：混合題（占 17 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

14 — 16 題組

設複數 ω 為方程式 $z^2 + z + 1 = 0$ 的根，試回答下列問題：

14. 若 $(a + b\omega)^2 = -1$, 其中 a, b 為實數，下列選項哪些正確？（多選題，5 分）

(1) $\text{Arg}(\omega)$ 有可能是 60°

(2) $\text{Arg}(\omega)$ 有可能是 120°

(3) $a + b$ 有可能是 $\sqrt{3}$

(4) $a + b$ 有可能是 $-\sqrt{3}$

(5) $|\omega| = |a + b\omega|$

15. 若 $z_1 = c + d\omega$, 其中 c, d 為實數，試求 $|z_1|$ 。（用 c, d 表示）（非選擇題，6 分）

16. 解複係數方程式 $z^2 - (3 - 2\omega)z + 1 - 4\omega = 0$, 並表示 $e + f\omega$ 的形式，其中 e, f 為實數。（非選擇題，6 分）

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 4

2. 5

3. 25

4. 12345

5. 14

6. 2

7. $-1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$

8. $(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2})$

9. (1) 8 ; (2) 4π

10. 11

11. 20

12. $\sqrt{7}$

13. $50 + 50i$

第貳部分：混合題

14. 2345

15. $\sqrt{c^2 + d^2 - cd}$

16. $2 - \omega, 1 - \omega$