

台中市台中女中 112 上高二第二次期中考

一、多選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 10 分。（每個選項 2 分）

1. 下列關於指數、對數的觀念，哪些正確？(前提：所有式子的左邊都有意義。)

(1) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

(2) $\log_a x^2 = 2 \log_a x$

(3) $\log_a x^3 = 3 \log_a x$

(4) $(ab)^3 = a^3 \times b^3$

(5) $(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$

2. $a > 1$ ，設 $f(x) = a^x$ ， $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ， $h(x) = \log_a x$ ， $k(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ ，則下列各敘述哪些正確？

(1) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的圖形對稱於 x 軸

(2) $y = f(x)$ 與 $y = x$ 的圖形必不相交

(3) 設 $x_1 \neq x_2$ ，則 $\frac{h(x_1) + h(x_2)}{2} < h\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

(4) 設 $x_1 \neq x_2$ ，則 $\frac{k(x_1) + k(x_2)}{2} < k\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

(5) $x > 0$ ，則 $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot k(x)$ 之值必小於或等於 0

二、填充題（占 80 分）

說明：第 3 題至第 16 題，每格 5 分。

3. 比較下列各數的大小：

$a = 2^{-3}$ ， $b = (0.5)^{-4}$ ， $c = (\sqrt{2})^{1.5}$ ， $d = (0.5)^{0.5}$ ， $e = (\sqrt{2})^{-\sqrt{2}}$ ：【 】。

4. 化簡求下列各式的值：

(1) $\log_3 48 + \log_3 49 - 2 \log_3 84 = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

(2) $\log \frac{4}{7} - \frac{4}{3} \log \sqrt[3]{8} + \frac{2}{3} \log \sqrt[3]{343} = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

5. 求 $\log \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

6. 若 $\log_{x+2}(-x^2 - 2x + 15)$ 有意義，則 x 的範圍為【 】。

7. 設 $\log 2 = a$ ， $\log 3 = b$ ， $\log 7 = c$ ，
則以 a 、 b 、 c 表示 $\log_{35} 84$ 之值為【 】。

8. 若將 $y = \log_2(ax + b)$ 的圖形向右平移 2 單位，再向下平移 3 單位後，
可得到 $y = \log_2(x - 3)$ 的圖形，則數對 $(a, b) = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

9. 解方程式 $\begin{cases} 2^x - 2^y = 96 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$ ，得 $(x, y) = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

10. 解方程式 $\log_6(2x - 1) + \log_6(x - 1) = 1$ ，得 $x = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

11. 解對數不等式 $\log_3(x + 1) < 2 - \log_3(x - 1)$ ，得 x 的範圍為【 】。

12. $f(x) = 2(\log_2 2x)^2 + \log_2(2x)^2 + 2 \log_2 x + 2$ 的最小值為【 】。

13. 目前已知最大的質數為 $2^{82589933} - 1$ ，若將此數以 A4 紙張列印，且每 A4 紙可列印 3000 個數字，
則需要 x 張 A4 紙，且 $100n \leq x < 100(n + 1)$ ，則 $n = \text{【 } \quad \quad \text{】}$

14. 小志 向某銀行借貸 10 萬元，言明年利率為 6%，每月計算利息。若 小志 計畫於 5 年後一次還清，
則總共應付的本利和為【 】元。

(請計算至整數位。參考數據： $(1.06)^5 \approx 1.33823$ ， $(1.06)^{30} \approx 5.74349$ ， $(1.06)^{60} \approx 32.98770$ ，
 $(1.005)^5 \approx 1.02525$ ， $(1.005)^{30} \approx 1.16140$ ， $(1.005)^{60} \approx 1.34885$ 。)

15. 若將魚從冷凍庫取出，放在 24°C 的溫度下解凍，放置 x 小時後魚的溫度為 $f(x) = 24 - 32 \cdot a^x$ ($^\circ\text{C}$)，其中 $x \geq 0$ 。根據經驗，魚在解凍 1 小時後的溫度為 8°C ，則解凍至 22°C 需要【 】小時。

16. 在心理學中，人類感官與實際數值的關係，常常會運用到對數函數。其中一個例子為席克法則：當一個人在做選擇時，有 n 個選擇（ n 為正整數），則做出選擇的時間 T 和 n 的關係式為：

$$T = b \times \log_2(n + 1)$$

其中 b 為一常數，因人而異。則：

(1) 小靖在買午餐時，如果有 3 種選擇，則做出決定的時間為 t_1 秒；在同樣情形下，如果選擇變為 7 種，則做出決定的時間變為 t_2 秒。若 $t_1 + t_2 = 30$ ，則 $b = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

(2) 承 (1)，如果選擇變為 15 種，做出決定的時間將為 $\text{【 } \quad \quad \text{】}$ 秒。

参考答案

1. 134 2. 35

3. $a < e < d < c < b$

4. (1) -1 ; (2) 0

5. -2

6. $-2 < x < 3$, $x \neq -1$

7. $\frac{2a+b+c}{1-a+c}$

8. $(8, -8)$

9. $(7, 5)$

10. $\frac{5}{2}$

11. $1 < x < \sqrt{10}$

12. -2

13. 82

14. 134885

15. 4

16. (1) 6 ; (2) 24