

新竹市竹科實中 112 上高一第一次期中考

一、單選題（占 10 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1. 下列敘述何者正確？

- (1) 若 a 、 b 皆為正無理數，則 $a + b$ 必為無理數
- (2) 若 a 、 b 皆為實數，若 $a + b\sqrt{5} = 3 + 7\sqrt{5}$ ，則 $a = 3$ 且 $b = 7$
- (3) 若 a^{18} 和 a^4 皆為有理數，則 a^3 必為有理數
- (4) $\sqrt[4]{2}$ 無法用尺規作圖在數線上標示出來
- (5) 若 p 為質數，則 $\sqrt{p}$ 必為無理數

2. 2018 年 12 月人類發現目前最大的質數為 $2^{82589933} - 1$ 。假設每張 A4 紙可列印 3000 個數字，則至少需要多少張 A4 紙才能列印出此質數的所有數字？(選最接近的張數)

- (1) 1800
- (2) 3000
- (3) 7000
- (4) 8300
- (5) 9000

二、多選題（占 18 分）

說明：第 3 題至第 5 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

3. 下列選項何者正確？

- (1) $1 - 0.\overline{9} > 0$
- (2) $\sqrt{5} + \sqrt{10} < \sqrt{2} + \sqrt{13}$
- (3) $\sqrt{7} - \sqrt{2} > \sqrt{10} - \sqrt{5}$
- (4) $\sqrt{(\sqrt{7} - \pi)^2} = \sqrt{7} - \pi$
- (5) $\frac{14159}{99990} = 0.\overline{14160}$

4. 令 $a < b$ ，則下列各數何者必定屬於區間 (a, b) ？(即介在 a 和 b 之間)

(1) $\frac{2a+3b}{5}$

(2) $\frac{4a-b}{3}$

(3) $\frac{2a+3b}{6}$

(4) $\frac{2a+3b}{4}$

(5) $\frac{\sqrt{2}a + \sqrt{3}b}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

5. 已知實數 a 、 b 滿足 $|a-2| \leq 3$ ， $|b+1| \leq 5$ ，請問下列何者正確？

(1) $a+b$ 的最大值為 9

(2) $3a-4b$ 可能為 30

(3) ab 的最小值為 6

(4) a^2 的最小值為 1

(5) $ab+3a-4b-12$ 的最大值為 47

三、填充題（占 62 分）

說明：第 6 題至第 15 題。

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	8	16	24	32	38	44	50	54	58	62

6. 設 x 、 y 為有理數，若 $7\sqrt{3} + x\sqrt{8 + \sqrt{60}} = 5\sqrt{5} + y\sqrt{17 - 4\sqrt{15}}$ ，
則數對 $(x, y) = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

7. 設 x 、 y 為實數，滿足 $|2x + y - 4| + (5x - 3y - 21)^2 = 0$ ，
則數對 $(x, y) = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

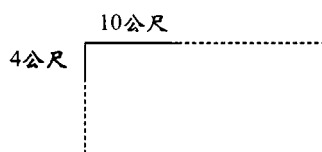
8. 將 $\frac{1232}{9990}$ 化為小數，小數點後第 n 位數字為 $f(n)$ 。若 $1 \leq x \leq 60$ ，則滿足 $f(x) = 3$ 的整數 x 共有【 】個。
9. 若 $a^{2x} = 5$ ，則 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^{3x} + a^{-3x}} =$ 【 】。
10. 令正數 a 的小數部分為 b ， $b \neq 0$ ，若 $a^2 + 2b^2 = 11$ ，則 $a =$ 【 】。
11. 已知 13^{100} 為 112 位數，則 13^{19} 為【 】位數。
12. 我們利用水溶液的氫離子濃度 $[H^+]$ （單位為莫耳／升）來定義此溶液的酸鹼 pH 值，公式 $\text{pH} = -\log [H^+]$ 。若某一水溶液的氫離子濃度為 $[H^+] = 1.2 \times 10^{-6}$ ，則此溶液的 pH 值為【 】。
(四捨五入至小數點後第一位)
13. 若不等式 $|ax - 3| \leq b$ 的解為 $-5 \leq x \leq 1$ ，則 $a + b =$ 【 】。
14. 試求不等式 $2|x - 3| - |x + 1| \leq -x + 9$ 的解為【 】。
15. 已知 $|7x - 1| \leq k$ 恰有 7 個整數解，若滿足此條件的 k 值最大可能範圍為 $a \leq k < b$ ，則數對 $(a, b) =$ 【 】。

四、計算證明題（占 10 分）

說明：第 16 題。

16. 阿巴想用長度 106 公尺的繩索（圖中虛線部分）沿著兩個互相垂直的牆面（圖中實線部分）圍出一個矩形菜園，其中垂直牆面長度分別圍 4 公尺和 10 公尺，如圖所示。

- (1) 試求阿巴所能圍出的最大矩形面積為多少平方公尺？(6 分)
- (2) 承 (1)，此時矩形的長、寬各為多少公尺？(4 分)



五、加分題（占 5 分）

說明：第 17 題。

17. 已知 $\sqrt{3}$ 是無理數，試用反證法證明 $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ 是無理數。（5 分）

參考答案

1. 5 2. 4

3. 35 4. 15 5. 12

6. (1, 4)

7. (3, -2)

8. 39

9. $\frac{10}{63}$

10. $2 + \frac{\sqrt{15}}{3}$

11. 22

12. 5.9

13. 3

14. $x \leq 8$

15. (22, 27)

16. (1) $900m^2$; (2) 長 $30m$, 寬 $30m$

17. 略