

台中市文華高中 112 下高一第一次期中考

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。

1. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$ ，則 $a_{20} = ?$

- (1) 1024
- (2) $1024\sqrt{3}$
- (3) $1024\sqrt{6}$
- (4) $512\sqrt{3}$
- (5) $512\sqrt{6}$

2. 下列各組數據，哪一組的變異數最小？

- (1) 21, 22, 23, 24, 25
- (2) 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5
- (3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$
- (4) 1, 2, 3, 4, 5
- (5) -15, -14, -13, -12, -11

3. 已知數據 (x, y) 的關係如下表，

X	87	89	87	88	89	88	86	90	86	90
Y	90	94	90	92	94	92	91	93	91	93

小明欲求 X 與 Y 的相關係數，為方便計算，他令 $U = 90 - X$ ， $V = Y - 90$ ，且求得 U 與 V 的相關係數為 -0.8 。則 X 與 Y 的相關係數為下列何者？

- (1) 0.8
- (2) 0.2
- (3) 0
- (4) -0.2
- (5) -0.8

4. 將 200 筆完全相異的數據由小到大排列為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{200}$ ，令 $y_i = 100 - 2x_i$ ，其中 $i = 1, 2, 3, \dots, 200$ ，則 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{200}$ 中的第 3 四分位數為何者？

- (1) $100 - 2x_{25}$
- (2) $100 - 2x_{75}$
- (3) $100 - (x_{50} + x_{51})$
- (4) $100 - (x_{25} + x_{26})$
- (5) $100 - (x_{75} + x_{76})$

二、多選題（占 10 分）

說明：第 5 題至第 6 題，每題 5 分。（5 - 3 - 1 - 0）

5. 某次小考過後全班 30 位同學的分數依序為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{30}$ ，由於全班沒人超過 40 分，於是老師透過 $y_i = 2x_i + 20$ （ $i = 1, 2, 3, \dots, 30$ ）的方式進行分數調整，設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{30}$ 的算術平均數為 μ_x ，標準差為 σ_x ，中位數為 M_x ，且 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{30}$ 的算術平均數為 μ_y ，標準差為 σ_y ，中位數為 M_y 。

- (1) 若調分後全班皆及格（即調分後至少有 60 分），則全班的原始分數皆不低於 20 分
- (2) 若至少有兩人的原始分數相異，則調分前後分數所組成的二維數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 之相關係數為 1
- (3) $\mu_y = 2\mu_x$
- (4) $M_y = 2M_x$
- (5) 若 $\sigma_x \times \sigma_y \neq 0$ ，則 $\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}$ ，其中 $i = 1, 2, 3, \dots, 30$

6. 設 $\langle a_n \rangle$ 是一個等差數列，且滿足 $2 < a_1 < 4$ ， $a_3 = 1$ ，若定義 $b_n = 2^{a_n}$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5$
- (2) $b_5 \neq 1$
- (3) b_2, b_4, b_6, b_8 是公比為正數的等比數列
- (4) $b_1 \times b_2 \times b_3 < 32$
- (5) $b_2 \times b_4 < b_1 \times b_3$

三、填充題（占 60 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每格 6 分；第 14 題至第 16 題，每格 4 分。

7. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 3^n - n^3 + 3$ ，則此數列的第 6 項 $a_6 =$

7-1 7-2 7-3。

8. 若 $P = 3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 300$ ， $Q = 3^2 + 6^2 + 9^2 + 12^2 + \cdots + 300^2$ ， $R = 3^3 + 6^3 + 9^3 + 12^3 + \cdots + 300^3$ ，

則 $\frac{P \times Q}{R} =$ 8-1 8-2。

9. 一等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 200 且公差為 -3 ， $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，則 S_n 的最大值

為 9-1 9-2 9-3 9-4。

10. 三個相異實數 a 、 b 、 c 成等差數列，且 $4 < a < b < c < 144$ ，已知 4 ， a ， b 成等比數列，且 b ，

c ， 144 也成等比數列，則 $\frac{a+b}{c} =$ 10-1 10-2。

11. 數學老師將全班同學分成兩組實施分組教學，並對兩組同學進行測驗分數如下：甲組 30 人，平均分數 60 分，標準差 5 分；乙組 20 人，平均分數 70 分，標準差 10 分。若將這兩組學生成績合併統計，則

(1) 新的算術平均數為 11-1 11-2 分。

(2) 新的標準差為 $\sqrt{\text{11-3} \text{11-4}}$ 分。

12. 某公司營業額連續四年的成長率分別為 -10% ， 0% ， 44% ， 60% ，則此公司營業額在這連續四年的平均成長率為 12-1 12-2 %。

13. 有 n 筆數據 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的算術平均數為 30，標準差 6，

則 $3x_1^2 + 12, 3x_2^2 + 12, \dots, 3x_n^2 + 12$ 的算術平均數為 13-1 13-2 13-3 13-4。

14. 已知某等差數列共有 n 項，且 n 是奇數。若其偶數項的和為 1800，奇數項的和為 2000，則 $n =$

14-1 14-2。

15. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，且 $\langle a_n \rangle$ 的每一項皆為整數， $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ，

$a_1 + a_3 + a_5 = 63$ ，則 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \underline{\underline{\textcircled{15-1} \textcircled{15-2} \textcircled{15-3} \textcircled{15-4} \textcircled{15-5}}}$ 。

16. 級數

$$\frac{2}{(3-1) \times (3+1)} + \frac{2}{(4-1) \times (4+1)} + \frac{2}{(5-1) \times (5+1)} + \cdots + \frac{2}{(10-1) \times (10+1)} = \underline{\underline{\frac{\textcircled{16-1} \textcircled{16-2} \textcircled{16-3}}{\textcircled{16-4} \textcircled{16-5} \textcircled{16-6}}}}。$$

四、計算題（占 10 分）

說明：第 17 題。

17. 利用數學歸納法，證明：對於任意正整數 n 而言，

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \text{ 恆成立。}$$

参考答案

1. 5

2. 2

3. 1

4. 3

5. 125

6. 1235

7. 395

8. 67

9. 6767

10. $\frac{3}{4}$

11. (1) 64 ; (2) $\sqrt{79}$

12. 20

13. 2820

14. 19

15. -2046

16. $\frac{106}{165}$

17. 略