

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度第一學期第一次期中考 題目卷

科目：數學 年級：高一 範圍：第一冊數與式 頁數：共 3 頁

1. 答案請有理化分母、化成最簡分數表達之。
2. 本試卷題型均可以自行判斷採用計算器為計算工具，允許的計算器機型限定下列四款：E-More FX-127、Fuhbao FX-180、Canon F-502G、Casio FX-82Solar(II)

一、 單選題(占 10 分，每題 5 分)

1. 已知 x 在 $[-2, 10)$ 區間範圍裡，則不等式 $x-1 < |x|$ 的整數解有幾個？
(1)9 個 (2)10 個 (3)11 個 (4)12 個 (5)13 個

2. 已知 a 是整數，若 $\frac{1}{5} < \frac{11}{a} < \frac{1}{2}$ ，已知 $\frac{11}{a}$ 為最簡分數且可化為有限小數，則符合條件的 a 值有幾個？
(1)3 個 (2)4 個 (3)5 個 (4)6 個 (5)7 個

二、 多選題(占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分)

3. 已知 a, b 為非零實數，下列選項何者正確？
(1) $\sqrt{2.7}$ 為有理數
(2) 將 $\frac{2}{7}$ 化為小數後，小數點後第 1212 位數字為 1
(3) 若 a, b 均為無理數，則 $|a| + |b|$ 可能為有理數
(4) 若 $a^2 > b^2$ ，則 $a > b$
(5) $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - 2 = a - \frac{1}{a}$

4. 下列選項何者正確？
(1) $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$
(2) $\log 1 + \log 100 + \log 0.001 = -1$
(3) $\log 2 = 0.3010$
(4) 5^{-112} 從小數點後第 79 位開始不為 0
(5) 2^{2023} 為 608 位數

三、 填充題(占 50 分，每題 5 分)

5. 國人產生的垃圾一年比一年多。根據環保署統計，2022 年的垃圾總量高達 11238654 公噸，將此數化為科學記號，並以 4 位有效數字表示。答：_____公噸。
6. 已知 $a + a^{-1} = 3$ ，則 $a^3 + a^{-3} =$ _____。
7. 已知 $a < b$ ， $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(\frac{a+b}{2})$ 、 $Q(\frac{4a-b}{3})$ 、 $R(\frac{2a+3b}{5})$ 。這五個點在數線上的相對位置由左至右排列順序為_____。
8. 假設 a 為實數且 $a > 0$ ，試化簡 $\sqrt[5]{a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{a^{-7}}} \div \sqrt{a^{-9}} = a^T$ ，則 $T =$ _____。
9. 設 $\sqrt{56}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} =$ _____。
10. 已知 x 是實數且滿足 $|x-4|:|x+6| = 2:1$ ，則 $x =$ _____。
11. 《原子習慣》一書中提到「每天進步 1%，持續一年你能獲得 37 倍成長；你的一點小改變、一個好習慣，都會產生驚人的加乘效應」。若目標訂為每天進步 0.5%，則持續 365 天後，按書上所寫，會增為原來的_____倍。（四捨五入至整數位）
12. 經濟學裡常常用兩個變數 x, y 來代表花錢購買兩種商品之後心理的滿足程度 U ，且利用 $U = x \cdot y$ （其中 U 為常數）所繪製出的圖形稱為無異曲線。小綠要將預算 12000 元全部用於購買綠制服悠遊卡（400 元/個）和光復樓一卡通（600 元/個），假設購買 x 個綠制服悠遊卡， y 個光復樓一卡通，會得到最大的滿足程度 z ，則數對 (x, y, z) 為_____。

13. 設 x, y 為實數，且均不為 0，若 $9^x = 25^y = 15^{xy}$ ，則 $x + y =$ _____。

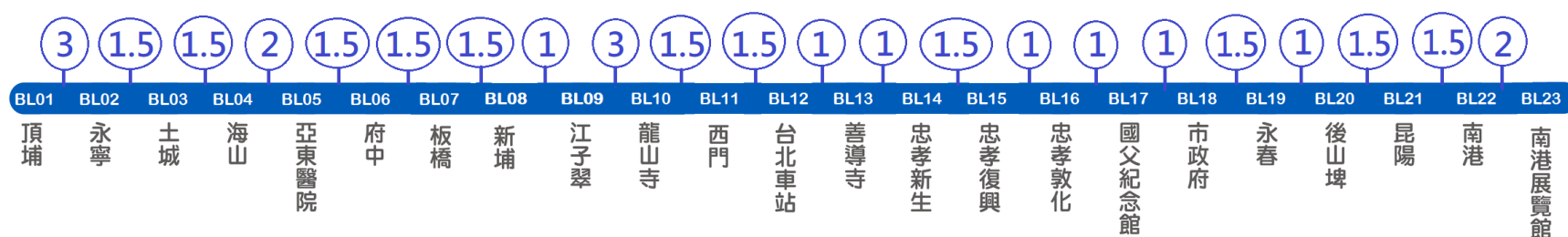
14. 若 $a > b > 0$ 且 $a \cdot b = 2$ ，則當 $a =$ _____時， $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ 有最小值。

四、混合題或計算證明題(占 20 分)

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。填充題在欄位處作答。計算證明題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

15-16 題為題組題

下圖為台北捷運板南線之路線圖，由頂埔站開始依序編號至南港展覽館站，分別是 BL01 至 BL23，每站之間上面的圓圈數字代表站與站之間的行駛時間(單位為分鐘)，例如：依據圖所示，江子翠站至龍山寺站行駛時間為 3 分鐘、國父紀念館站至市政府站行駛時間為 1 分鐘，假設每一站停靠時間為 0.5 分鐘。



15. 小綠與小源相約西門站會合，約定的時間已到卻不見小源的身影，此時接獲小源來電：「我在月台上，捷運正剛抵達，7 分鐘後會在西門站下捷運！」已知小源搭乘板南線列車前來，請問小源現在可能所在的站別為？(填充題，無須計算過程，4 分)

16. 小綠詢問小源家離哪一個捷運站最近，小源答：「我家在板南線上，離西門至少要搭 a 站，到市政府不用 b 站。」小綠將小源家位置設為 **BL x** 站， x 為未知數且為正整數，各站依編號的號碼畫在數線上，根據小源的回答可列出聯立不等式
$$\begin{cases} |x - 11| \geq a \\ |x - 18| < b \end{cases}$$
，解出 $17 \leq x < 21$ ，求 a 和 b 的值。(計算題，6 分)

17. (1)化簡雙重根號 $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 。(計算題，3 分)

(2)設 $x = \log \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ ，計算 $10^x + 10^{-x}$ 。(計算題，3 分)

(3)承(2)，已知 $\sqrt{2}$ 為無理數，請利用反證法，證明 $10^x + 10^{-x}$ 為無理數。(證明題，4 分)

臺北市立第一女子高級中學 112 學年度第一學期數學科第一次期中考 答案卷

注意 答案請以最簡分數、有理化分母表達之。 一年____班____號 姓名_____

一、 單選題(占 10 分，每題 5 分)

1.	2.
----	----

二、 多選題(占 20 分，每題 10 分，每個選項 2 分)

3.	4.
----	----

三、 填充題(占 50 分，每題 5 分)

5.	6.	7.	8.	9.
10.	11.	12.	13.	14.

四、 混合題或計算證明題(占 20 分)

15. _____

16.

17.

簡答

一、單選題

1. (4) 2. (2)

二、多選題

3. (1)(3) 4. (1)(2)(4)

三、填充題

5. 1.124×10^7 6. $\underline{18}$ 7. $\underline{QAPRB}$ 8. $\frac{13}{3}$ 9. $\frac{2\sqrt{14}+6}{7}$
10. $-16, -\frac{8}{3}$ 11. $\underline{6}$ 12. $\underline{(15, 10, 150)}$ 13. $\underline{2}$ 14. $\underline{\sqrt{3}+1}$

四、混合題或計算題

15. 新埔站或忠孝復興站 16. $\underline{(a, b) = (6, 3)}$ 17. (1) $\underline{\sqrt{2}-1}$ (2) $\underline{2\sqrt{2}}$ (3) 略

詳解

1. Case1. $x \geq 0$, $x-1 < x \Rightarrow -1 < 0$, 在 $x \geq 0$ 的條件下原式恆成立

Case2. $x < 0$, $x-1 < -x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$, 兩者取交集後, 在 $x < 0$ 的條件下原式成立

故此不等式的解應為 $x \in \mathbb{R}$, 區間範圍內的整數有 -2 到 9 共 12 個

2. $\frac{11}{55} < \frac{11}{a} < \frac{11}{22} \Rightarrow 22 < a < 55$, $\frac{11}{a}$ 為最簡分數且可化為有限小數, 故 $a = 2^n \times 5^m$ (n, m 為非負整數)

且介於 22 和 55 之間, 故 a 的可能值為 25、32、40、50, 共 4 個

3. (1) O: $\sqrt{2.7} = \sqrt{\frac{27}{10}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ 為無理數

(2) X: $\frac{2}{7} = 0.285714$, $\frac{1212}{6} = 202 \dots 0$, 故小數點後第 1212 位數字應為 4

(3) O: 若 $a = \sqrt{2}$, $b = 2 - \sqrt{2}$, 則 $|a| + |b| = 2$ 為有理數

(4) X: 若 $a = -5$, $b = 3$, 則不符合

(5) X: $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - 2 = |a - \frac{1}{a}|$

故選(1)(3)

4. (1) O: $(2^{\frac{1}{2}})^6 = 8$, $(3^{\frac{1}{3}})^6 = 9 \Rightarrow 8 < 9 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$

(2) O: $\log 1 + \log 100 + \log 0.001 = 0 + 2 + (-3) = -1$

(3) X: $\log 2$ 近似值為 0.3010

(4) O: $5^{-112} \approx (10^{0.6990})^{-112} = 10^{-78.288} = 10^{0.712} \times 10^{-79}$, 故小數點後第 79 位開始不為 0

(5) X: $2^{2023} = (10^{\log 2})^{2023} \approx 10^{608.98}$ 為 609 位數

故選(1)(2)(4)

5. 11238654 取 4 位有效數字後(四捨五入)表示成科學記號為 1.124×10^7

6. $a^3 + a^{-3} = (a^1 + a^{-1})^3 - 3 \cdot a^1 \cdot a^{-1} \cdot (a^1 + a^{-1}) = 27 - 9 = 18$

7. 由分點公式整理 Q 可得 $a = \frac{3Q+b}{4}$ ，則可知在數線上由左至右為 QAPRB

8. $(a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{-7}{3}})^{\frac{1}{5}} \div a^{\frac{-9}{2}} = (a^{\frac{-5}{6}})^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{9}{2}} = a^{\frac{26}{6}} = a^{\frac{13}{3}}$ 故 $T = \frac{13}{3}$

9. 已知 $\sqrt{49} < \sqrt{56} < \sqrt{64}$ ，可得 $a = 7$ 且 $b = \sqrt{56} - 7 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{56}-7} - \frac{1}{7} = \frac{\sqrt{56}+7}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2\sqrt{14}+6}{7}$

10. 若 $-6 < x < 4$ ，由分點公式可得 $x = \frac{2 \times (-6) + 1 \times 4}{1+2} = \frac{-8}{3}$

若 $x < -6$ ，由分點公式可得 $-6 = \frac{1 \cdot x + 1 \cdot 4}{1+1} \Rightarrow x = -16$ ，故 $x = -16, -\frac{8}{3}$

11. $(1.005)^{365} \approx 6.17 \approx 6$

12. 由題幹可得 $400x + 600y = 12000 \Rightarrow 2x + 3y = 60$ ，利用算幾不等式 $\frac{2x+3y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot 3y} \Rightarrow 150 \geq xy$

等號發生在當 $2x = 3y$ 時且 $2x + 3y = 60$ ，可得當 $x = 15, y = 10$ 有 xy 的最大值 150，故 $(x, y, z) = (15, 10, 150)$

13. $9 = 15^y, 25 = 15^x \Rightarrow 15^{x+y} = 9 \cdot 25 = 15^2$ ，故 $x + y = 2$

14. $\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2ab}{a-b} = (a-b) + \frac{2 \cdot 2}{a-b}$ 又因 $a > b$ 可用算幾不等式得 $(a-b) + \frac{4}{a-b} \geq 4$

等號發生時當 $(a-b) = \frac{4}{a-b}$ 且 $(a-b) + \frac{4}{a-b} = 4$ 可得 $\begin{cases} a \cdot b = 2 \\ a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$ (因為 $a > 0$ 故負不合)

15. 由西門站往左右兩邊數 7 分鐘(涵蓋各站停靠 0.5 分鐘)可得新埔站與忠孝復興站

16. $\begin{cases} |x-11| \geq a \Rightarrow x \geq 11+a \text{ or } x \leq 11-a \\ |x-18| < b \Rightarrow 18-b < x < 18+b \end{cases}$ 交集後的解為 $17 \leq x < 21$ 故 $\begin{cases} x \geq 11+a = 17 \\ x < 18+b = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$

17. (1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2+1-2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

(2) $10^x = \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{2}-1, 10^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ ，故 $10^x + 10^{-x} = 2\sqrt{2}$

(3) 設 $2\sqrt{2} = q \in \mathbb{Q}$ ，則 $\sqrt{2} = \frac{q}{2} \in \mathbb{Q}$ 矛盾於已知 $\sqrt{2}$ 為無理數，故 $2\sqrt{2}$ 為無理數