

新竹市新竹高中 112 下高二期末考

第壹部分：選擇（填）題（占 80 分）

一、多選題（占 14 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 7 分。(7-4-1-0)

1. 設 A, B 是樣本空間 S 中的兩事件， $P(A) = \frac{3}{8}$ ， $P(B) = \frac{3}{4}$ ， $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ ，則下列哪些選項正確？

(1) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

(2) $P(A | B) = \frac{1}{3}$

(3) $P(A' | B) = \frac{1}{3}$

(4) $P(A' | B') = \frac{1}{8}$

(5) $P(B - A) = \frac{3}{8}$

2. 設 A, B, C 皆為二階方陣，且 $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則下列何者正確？

(1) 若 $(A + I)(A - I) = O$ ，則 $A = -I$ 或 $A = I$

(2) 若 $AB = AC$ 且 A^{-1} 存在，則 $B = C$

(3) $\det(3A) = 9 \det(A)$

(4) 若 A, B 皆不為零矩陣，則 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(5) $(AB)^3 = A^3B^3$

二、填充題（占 66 分）

說明：第 3 題至第 13 題，配分如下。											
答對總題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	8	16	24	30	36	42	48	54	58	62	66

3. 設 $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix}$ ，若乘法反方陣 A^{-1} 不存在，求 $x = \underline{3-1}$ 或 $\underline{3-2}$ $\underline{3-3}$ 。

4. 同時投擲三顆公正的骰子一次，則在至少出現一顆 1 點的條件下，其點數和奇數的機率為 $\underline{4-1}$ $\underline{4-2}$ 。
 $\underline{4-3}$ $\underline{4-4}$ 。

5. 若矩陣 A, B 滿足 $2A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， $2A + B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ，
求 $4A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} \underline{5-1} & \underline{5-2} \\ \underline{5-3} & \underline{5-4} \end{bmatrix}$ 。

6. 設 A, B 為獨立事件，且 $P(A) = \frac{3}{8}$ ， $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ，求 $P(B) = \frac{\underline{6-1}}{\underline{6-2} \underline{6-3}}$ 。

7. 求 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{7-1}}{\underline{7-2}} & \frac{\underline{7-3}\sqrt{\underline{7-4}}}{\underline{7-5}} \\ \frac{\sqrt{\underline{7-6}}}{\underline{7-7}} & \frac{\underline{7-8}}{\underline{7-9}} \end{bmatrix}$ 。

8. 在坐標平面上，將點 $A(2, 1)$ 沿 x 軸方向推移 y 坐標的 2 倍，再對 $x + y = 0$ 鏡射，求新坐標為 $\underline{(8-1)} \underline{(8-2)}$, $\underline{(8-3)} \underline{(8-4)}$ 。

9. 某家公司有甲、乙、丙 3 條生產線，甲每天的產量為丙的 2 倍，且甲、乙、丙生產的不良品比率分別為 2%，3%，4%。品管部隨機抽取 1 個發現是不良品，若此不良品是由甲生產的條件機率為 $\frac{4}{9}$ ，則甲的產量佔總產量的比率為 $\frac{\underline{9-1}}{\underline{9-2}}$ 。

10. 已知 A 袋有 2 顆白球與 1 顆紅球， B 袋有 2 顆白球。各從 A, B 袋中任取一球，互換後放回袋內如此稱為一局。設每顆球從袋中被取到的機會均等，則當第二局結束時，求紅球在 A 袋的機率為

$$\frac{\frac{10-1}{10-3} \cdot \frac{10-2}{10-4}}{\frac{10-1}{10-3} \cdot \frac{10-2}{10-4} + \frac{10-1}{10-3} \cdot \frac{10-2}{10-4}}。$$

11. 設直線 $L: y = 3x$ ，則點 $P(2, 1)$ 對直線 L 作鏡射後所得的點為 P' ，求點 P' 的坐標為

$$(\frac{11-1}{11-2}, \frac{11-3}{11-2})。$$

12. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{5} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ ，而 $P(1, 4), Q(5, 1), R(6, 5), S(4, 8)$ ，經過方陣 A 的變換後，分別變

成為 P', Q', R', S' ，求四邊形 $P'Q'R'S'$ 的面積 = $\frac{12-1}{12-2} \cdot \frac{12-2}{12-2}。$

13. 已知 A, B 為二階可逆方陣滿足 $A^2 - 2AB = O$ ，若 $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，

$$c = \frac{\frac{13-1}{13-2}}{\frac{13-2}{13-2}}。$$

第貳部分：混合題（占 20 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

14 — 15 題組

設 $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，若實數 x, y 滿足 $A^2 + xA + yI = O$ ，試求：

14. 數對 (x, y) 。(非選擇題，5 分)

15. $A^4 - 7A^3 - 13A^2 - 21A + 6I$ 。(非選擇題，6 分)

16 — 17 題組

設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求下列各題：

16. 已知 $J^2 = xJ$ ，求實數 x 。(非選擇題，5 分)

17. 已知 $\left(I + \frac{1}{2}J\right)^{10} = aI + bJ$ ，其中 a, b 為常數，求數對 (a, b) 。(非選擇題，5 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 124

2. 23

3. 3 或 -1

4. $\frac{46}{91}$

5. $\begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\frac{7}{15}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

8. $(-1, -4)$

9. $\frac{3}{5}$

10. $\frac{11}{18}$

11. $(-1, 2)$

12. 36

13. $\frac{3}{2}$

第貳部分：混合題

14. $(-9, 2)$

15. $\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

16. 2

17. $\left(1, \frac{1023}{2}\right)$