

市立臺中一中 112 學年度 第二學期 期末考 高三數學甲 試題 科目代碼：03
請正確劃記班級、座號、科目代碼，未劃記或劃記錯誤，扣 5 分。請將答案約至最簡分數。
超過 100 分以 100 分計。

一、單選題 (10 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 z 為一複數，且 $\frac{z-3}{z+3} = i$ (其中 $i = \sqrt{-1}$ 為虛數單位)。試問 z 的絕對值 $|z|$ 為下列哪一個選項？
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5
2. 某國小園遊會某班推出抽寶可孟五星卡盲盒活動，並在促銷時段宣稱『抽中大獎的機率為 20%』。小串在促銷時段抽卡，一次抽一個直到抽中大獎為止。已知在第 k 次才抽中大獎，則 k 至少為下列哪個選項，才能在以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 的條件下，檢定此遊戲公司宣稱抽中大獎的機率是不實的？(在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 的條件下，利用

$$P(X > x) = \sum_{k=x+1}^{\infty} (0.8)^{k-1} \times 0.2, \text{ 求出拒絕域, 參考數據: } \log 2 = 0.3010)$$

- (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14

【答】此題送分，答案為 15

二、多選題 (40 分)

說明：第 3 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項，選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 10 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 設 $a, b \in \mathbb{R}$ ，三次方程式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ 有一根為 $1 + 2i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則下列哪些選項是正確的？
(1) 有一根為 $1 - 2i$ (2) $f(x)$ 有二次因式 $x^2 - 2x + 3$ (3) 有實根 -3
(4) $a = -1$ (5) $b = 1$

4. 已知 X 、 Y 均為隨機變數，則關於期望值、變異數與標準差的性質，下列哪些正確？

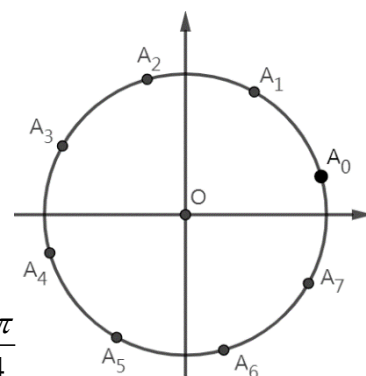
- (1) $E(3X + 4Y + 5) = 3 \cdot E(X) + 4 \cdot E(Y) + 5$
 (2) $\text{Var}(3X) = 3 \cdot \text{Var}(X)$
 (3) $\sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$
 (4) 若 X 滿足二項分布，則 $E[X(X - 1)] = E(X) \cdot E(X - 1)$
 (5) 若 Y 滿足幾何分布，則 $\text{Var}(Y^2) = [\text{Var}(Y)]^2$

5. 有一個箱子裡有 2 個紅球，2 個白球，今從箱子裡任意取球，一次取出一個球，取後不放回，令 $P(k)$ 表示 3 次中出現 k 次紅球的機率($k=1, 2$)；令 Y 表示 2 個紅球都被取出時，就停止取球的次數，則下列哪些敘述是正確的？

- (1) $P(k=1) = \frac{1}{4}$ (2) $P(k=2) = \frac{1}{2}$ (3) $P(Y=3) = \frac{1}{3}$ (4) $P(Y=4) = \frac{1}{3}$ (5) $E(Y) = \frac{10}{3}$

6. 已知 n 為正整數， a 為複數，若 $z^n = a$ 的所有根在複數平面上

對應的點如右圖所示，且令 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ ，則下列敘述哪些正確？



- (1) 若 $z^n = a$ 的其中一根為 t ，則其餘的根為 $t\omega, t\omega^2, t\omega^3, \dots, t\omega^7$
 (2) 若複數 z_k 在右圖中對應的點為 A_k ，則 $\text{Arg}(z_6) - \text{Arg}(z_1) = \frac{5\pi}{4}$
 (3) $\omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \dots + \omega^{44} = 1$
 (4) $(2 - \omega) \cdot (2 - \omega^3) \cdot (2 - \omega^5) \cdot (2 - \omega^7) = 17$
 (5) 若 $\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_3} \cdot \overline{A_1 A_4} = 16$ ，則 $|a| = 4$

三、選填題(一) (40 分)

說明：第 A 題至第 F 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (⑦ ~ ⑳)。每格完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若 X 為隨機變數，且 X 的機率分布如下：

X	-2	-1	0	1	2
機率	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

求：(1) $E(X^2) = \frac{\textcircled{7}\textcircled{8}}{10}$ 。 (2) $E[(X - E(X))^2] = \frac{\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{11}}{100}$ 。

B. 某次的模擬考共有 50 題單選題，每題均有 5 個選項，小戈有 30 題只能確定其中一個選項錯誤，他就從剩下的 4 個選項任意猜選一個；而其餘 20 題完全不會，就從 5 個選項任意亂猜，若各題的猜答互不影響，且 X 為答對的題數，則 $E(X) = \frac{\textcircled{12}\textcircled{13}}{\textcircled{14}}$ 。

C. 龍來發宮殿在春節期間準備許多紅包讓信徒擲筊得發財金，擲筊的結果共有一平一凹、兩平、兩凹共 3 種型式，並宣稱活動會一直持續到送出所有的發財金。每位信徒擲筊最多 3 回，當擲筊過程中出現連續兩回「聖杯」(一平一凹)，則該顧客停止擲筊並得到發財金。我們可將每位信徒擲筊是否得到發財金視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到發財金的信徒是第 X 位擲筊的信徒，並以 $E(X)$ 表示隨機變數 X 的期望值，則 $E(X) = \frac{\textcircled{15}}{\textcircled{16}}$ 。

D. 袋中有 4 顆紅球和 3 顆黑球，每球被取出的機會均等。小杜自袋中每次取一球，取後放回，已知小杜共取 25 次，令 X 為取出紅球的次數，若 $P(X = k)$ 表示取出紅球次數為 k 的機率，且 $P(X = n) \geq P(X = n + 1)$ ， $P(X = n) \geq P(X = n - 1)$ ，則 $n = \textcircled{17}\textcircled{18}$ 。

E. 已知 $Z = \frac{(8\sqrt{3} - 8i)(2 + i)^4}{(3 + 4i)^2 (\cos 160^\circ + i \cdot \sin 200^\circ)^5}$ ，則

(1) $|Z| = \textcircled{19}\textcircled{20}$ ； (2) Z 的主幅角 $\text{Arg}(Z)$ 為 $\frac{\textcircled{21}}{\textcircled{22}\textcircled{23}}\pi$ 弧度。

- F. 已知 $f(x) = (x + a)(x^2 + bx + c)$ ，其中 a, b, c 為整數，若 $f(\pi) \cdot f(\sqrt{17}) < 0$ ，且 $f(x) = 0$ 的三根在複數平面形成一個以原點為外心的正三角形，則 $a + b + c = \underline{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。

四、選填題(二) (12 分)

說明：第 F 題至第 H 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (②⑥ ~ ③⑤)。每格完全答對得 4 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- G. 在複數平面上，已知複數 z 在第一象限且滿足 $|z| = 1$ ，令 $\omega = \frac{-3+4i}{5}$ (其中 $i = \sqrt{-1}$) 滿足 $\text{Arg}\left(\frac{z^3}{\omega}\right) = \text{Arg}\left(\frac{\omega}{z}\right)$ 。若 z 的實部為 a 、虛部為 b ，則序對 $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{\textcircled{26}}}{\textcircled{27}}, \frac{\textcircled{28}\sqrt{\textcircled{29}}}{\textcircled{30}}\right)$ 。(化為最簡根式)

- H. 試求 $9 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots + (n-4)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \cdots = \underline{\textcircled{31}\textcircled{32}}$ 。

- I. 試求 $\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{\textcircled{33}}{\underline{\textcircled{34}\textcircled{35}}}$ 。

試題結束

市立臺中一中 112 學年度第二學期 第一次期中考 高三數學(甲組)試題 簡答

一、單選題

I. (3) **2.** 送分！答案為 15

二、多選題

3. (1)(3) **4.** (1) **5.** (2)(3)(5) **6.** (1)(2)(4)

三、選填題(一)

A. (1) 21 (2) 209 **B.** $\frac{23}{2}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** 14 **E.** (1) 16 (2) $\frac{5}{18}\pi$ **F.** 16

四、選填題(二)

G. $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ **H.** 12 **I.** $\frac{7}{64}$