

112 學年度第二學期第一次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第一章 空間向量、2-1 空間中的平面

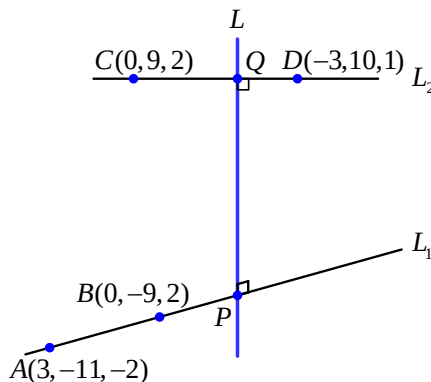
一、多選題（每題 8 分，共 24 分）

每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

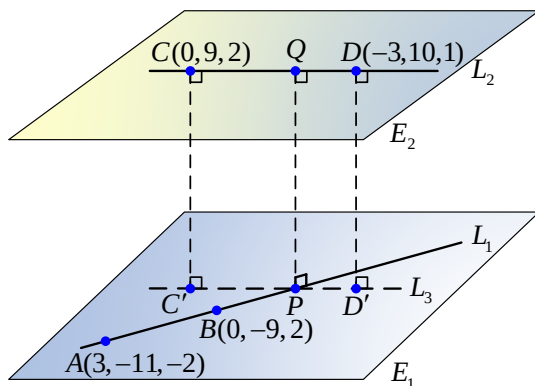
- 對於下列空間向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的運算性質，試選出正確的選項。
 - $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$
 - $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$
 - $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
 - 若 $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，則 $\vec{a} \perp \vec{b}$
 - 若 $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ，則 $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ 。
- 已知平面 $E_1 \parallel E_2$ ，直線 L_1 落在 E_1 上，直線 L_2, L_3 落在 E_2 上，且 $d(L_1, L_2) > d(L_1, L_3) = d(E_1, E_2)$ 。試選出正確的選項。
 - L_1 與 L_2 平行
 - L_1 與 L_3 歪斜
 - L_1 與 L_2 不共平面
 - 若直線 L 同時與 L_2, L_3 垂直，則 $L \perp E_2$
 - 包含 L_1 且與 L_2 平行的平面恰有一個。
- 對於下列「空間」中的敘述，試選出正確的選項。
 - 相異三點決定唯一平面
 - 若兩相異直線不平行，則必恰有一條公垂線
 - 若兩相異直線垂直於同一直線，則此二直線平行
 - 若兩相異直線垂直於同一平面，則此二直線平行
 - 空間中包含一直線的平面有無限多個。已知在分別包含直線 L_1, L_2 的平面中，存在唯一的一組平行平面 E_1, E_2 ，則 L_1 與 L_2 必歪斜。

二、混合題（每小題 5 分，共 60 分）

1. 如右圖所示，我們知道一對歪斜線 L_1 （直線 AB ）與 L_2 （直線 CD ）必恰有一條公垂線 L ，而 L 與 L_1, L_2 的交點 P, Q 即為兩線間最短之距離，以 $d(L_1, L_2) = \overline{PQ}$ 表示。雖然同學們還沒學到空間中的直線方程式，所以可能無法找出 P, Q 二點之坐標，但利用向量的基本運算、相關應用以及平面方程式，還是可以快速地計算出兩歪斜線之間的距離。請同學們跟隨題目的引導，一步一步計算出 L_1 與 L_2 間的距離，並試著解開相關的延伸問題。

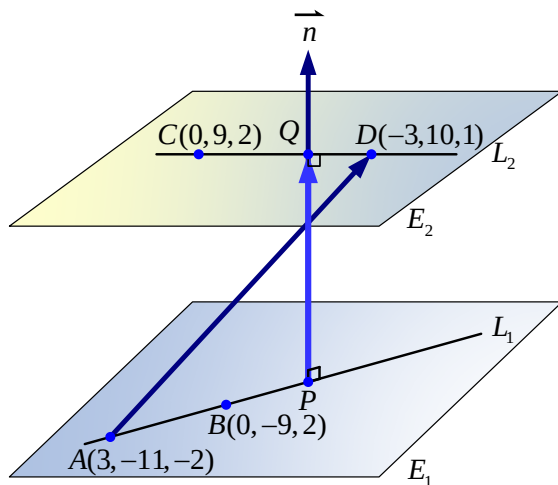


如下圖所示，設 E_1, E_2 為分別包含 L_1, L_2 的平行平面，且 C', D' 分別為 C, D 在平面 E_1 上的投影點， L_3 （直線 $C'D'$ ）為 L_2 在平面 E_1 上的投影直線。則 $d(L_1, L_2) = \overline{PQ} = d(L_2, L_3) = d(E_1, E_2) = d(C, E_1) = d(D, E_1)$ 。故可計算平面 E_1 之方程式，再利用點到平面的距離公式求出 $d(L_1, L_2) = d(C, E_1)$ 。



- (1) 若 $\vec{n} = (s, t, -1)$ 為平面 E_1 的法向量，則 $(s, t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 若平面 E_1 之方程式為 $2x + by + cz + d = 0$ ，則 $(b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (3) 計算 $d(L_1, L_2) = d(C, E_1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

事實上，在 L_1 上任取一點作為始點，並在 L_2 上任取一點作為終點所得之向量，在 $\vec{n}$ 上的正射影皆為 $\overrightarrow{PQ}$ ，如此可得 $d(L_1, L_2) = |\overrightarrow{PQ}|$ 。



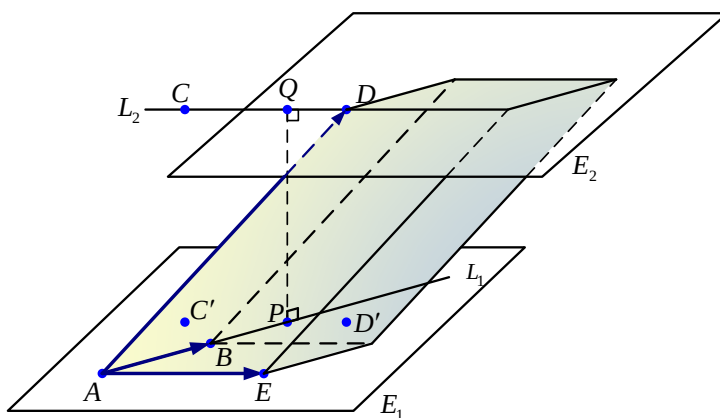
(4) 計算 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\vec{n}$ 上的正射影為 _____。

(5) 若將 $\overrightarrow{AD}$ 分解為 $\overrightarrow{AD} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ，其中 $\vec{\alpha} \parallel \vec{n}$ ， $\vec{\beta} \perp \vec{n}$ ，則 $\vec{\beta} =$ _____。

如下圖所示， $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AE}$ 。若 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$ 張出一個平行六面體，

則以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$ 張出之平行四邊形作為其底面時，其高即為

$\overline{PQ} = d(E_1, E_2) = d(C, E_1) = d(D, E_1)$ 。



- (6) 計算 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$ 張出之平行六面體的體積 $V =$ _____。
- (7) 若三向量 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}, -2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}, 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD}$ 張出之平行六面體的體積為 V' ，則 $\frac{V'}{V} =$ _____。
- (8) 若 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之夾角為 θ ，則 $\cos \theta =$ _____。
- (9) 計算 $\triangle ACD$ 之面積為 _____。
- (10) 已知 $\triangle ACD$ 在平面 E_1 上之正射影面積 $\triangle AC'D' = 3\sqrt{30}$ ，若平面 ACD 與平面 E_1 之銳夾角為 γ ，則 $\cos \gamma =$ _____。
- (11) 若 R 為平面 ACD 上滿足 $\overrightarrow{AR} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$ 之動點，其中 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 3x + 2y \leq 6$ ，則 R 在平面 ACD 上分布之區域面積為 _____。
- (12) 若 S 為 y 軸上一點，且 A, C, D, S 四點共面，則 S 之 y 坐標為 _____。

三、填充題（每格 8 分，共 16 分）

- A. 設 $\overrightarrow{a} = (4, 2s - 3t, s + 4t), \overrightarrow{b} = (1, -1, 2)$ ，且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 30° 。若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張成的平行四邊形在三個坐標平面的投影面積分別為 $\frac{11}{5}, \frac{23}{5}, 7$ ，則數對 $(s, t) =$ _____。
- B. 如右圖所示，一平面與正四面體 $A-BCD$ 之稜線 $\overline{AD}$ 垂直，且分別交 $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ 於 P, Q, R 三點。

若已知 $\frac{\triangle PQR \text{ 的面積}}{\triangle BCD \text{ 的面積}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，

則 $\frac{\text{四面體 } A-PQR \text{ 的體積}}{\text{四面體 } A-BCD \text{ 的體積}} =$ _____。（化成最簡根式）

