

台北市立第一女子高級中學 112 學年度第二學期高二數 A 期末考試題

一、多選題：（每題 10 分，共 40 分）

1. 設 A 、 B 、 C 、 X 皆為二階方陣， I 是二階乘法單位方陣， O 是二階零方陣，下列各敘述哪些恆為真？

- (A) 若 $A=O$ 或 $B=O$ ，則 $AB=O$ (B) 若 $A^2=I$ ，則 $A=I$ 或 $A=-I$ (C) 若 $A \neq O$ ，且 $AB=AC$ ，則 $B=C$
 (D) $\det(3A)=9\det(A)$ (E) 若 $\det(A) \neq 0$ ，且 $AXA^{-1}=B$ ，則 $X=A^{-1}BA$ 。

2. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，若二階方陣 B 滿足 $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ ，則 B 可為下列哪一個方陣？

- (A) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{2024}$ (D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 20 & 25 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$ 。

3. 關於方程組 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=4 \\ 3x+2y+az=b \end{cases}$ 的解，下列哪些選項是正確的？

- (A) 若方程組有解，則 $a \neq 3$ (B) 若 $a=1$ ，則方程組恰有一組解 (C) 若方程組無解，則 $b \neq 5$
 (D) 若 $b \neq 5$ ，則方程組無解 (E) 若方程組有無限多組解，則行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$ 。

4. 非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ ，且 $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ 為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 的解；
 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (A) 方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 有無限多組解 (B) $(-6, -4, -2)$ 為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 的一組解
 (C) $(2, 3, -1)$ 為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=1 \\ a_3x+b_3y+c_3z=1 \end{cases}$ 的一組解 (D) $(5, 5, 0)$ 為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=1 \\ a_3x+b_3y+c_3z=1 \end{cases}$ 的一組解
 (E) $(-2, -3, 1)$ 為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=-1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=-1 \\ a_3x+b_3y+c_3z=-1 \end{cases}$ 的一組解。

二、填充題：（每題 5 分，共 50 分）

1. 設方程式 $\begin{bmatrix} 1-a & 5 \\ -4 & 1+3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 無解，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(一解)

2. 設二階方陣 A 、 B 滿足 $A+2B=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ，且 $A-B=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $\det(A^{-1}BA) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ， $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & -7 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $AB+AC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & b & -3 \\ 0 & 2 & -1 & c \end{array} \right]$ 經過一系列的矩陣列運算後可以化成 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$ ，
則序組 $(a, b, c) =$ _____。

5. 已知 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 、 $\vec{x}$ ，若 $\vec{x}$ 可表成 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 三向量的線性組合，則
 $k =$ _____。

6. 設 a 與 b 是實數，若方陣 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換把直線 $L_1: x+2y=1$ 變換到直線 $L_2: 5x-2y+5=0$ ，
則數對 $(a, b) =$ _____。

7. 在平面上有一四邊形 S ，依序作下列 (a)、(b)、(c) 之線性變換後得到新的四邊形 S' ：

(a) 以原點為中心，沿著 x 軸方向伸縮為 2 倍，沿著 y 軸方向伸縮為 4 倍。

(b) 對直線 $y = \sqrt{3}x$ 做鏡射。

(c) 沿著 x 軸推移 y 坐標的 2 倍。

若 S 經過矩陣 T 變換後亦可得 S' ，則 T 的矩陣表示為_____。

8. 正六邊形 $ABCDEF$ ，設 $A(-1, -1)$ 、 $C(3, 1)$ ，已知 E 點在第二象限，則 E 點坐標為_____。

9. 已知 A 為一個二階轉移矩陣，且對任意正整數 n 皆滿足 $X_n = AX_{n-1}$ 。若 $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ， $X_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，則
矩陣 $X_3 =$ _____。

10. 設甲袋有二白球一黑球，乙袋有一白球，先自甲袋中隨機取一球放入乙袋，再自乙袋中隨機取一球放入甲袋，如此稱為一局，則第三局結束後，甲袋有三白球之機率為_____。

三、混合題：(10 分)

1. 已知 $M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，

(1) $P^{-1} = ?$ (單選題，2分)

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ 。

(2) $PMP^{-1} =$ _____。(填充題，3分)

(3) 利用(2)的結果，求 $M^6 = ?$ (計算題，5分)

台北市立第一女子高級中學 112 學年度第二學期高二數 A 期末考答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多選題：（每題 10 分，共 40 分）

1.	2.	3.	4.

二、填充題：（每題 5 分，共 50 分）

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

三、混合題：(共 10 分)

1.(1)	(單選題，2 分)
1.(2)	(填充題，3 分)
1.(3)	(計算題，5 分)

台北市立第一女子高級中學 112 學年度第二學期高二數 A 期末考答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多選題：（每題 10 分，共 40 分）

1.	2.	3.	4.
<i>ADE</i>	<i>ABCD</i>	<i>BCE</i>	<i>ABCDE</i>

二、填充題：（每題 5 分，共 50 分）

1.	2.	3.	4.	5.
$-\frac{7}{3}$	0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \end{bmatrix}$	$(-2,-3, 4)$	-1
6.	7.	8.	9.	10.
$(-2, 3)$	$\begin{bmatrix} -1+2\sqrt{3} & 4+2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$	$(1-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$	$\begin{bmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{13}{24} \end{bmatrix}$	$\frac{13}{54}$

三、混合題：(共 10 分)

1.(1)	<i>D</i>	(單選題，2 分)
1.(2)	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$	(填充題，3 分)
1.(3)	$\begin{bmatrix} -601 & 665 \\ -1330 & 1394 \end{bmatrix}$	(計算題，5 分)