

# 新竹市新竹高中 112 上高三期末考(理)

第壹部分：選擇（填）題（占 92 分）

## 一、多選題（占 32 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 8 分。(8-6-4-2-0)

1. 已知一拋物線的焦點為  $F$ ，準線為  $L$ ，頂點為  $V$ ， $P$  為此拋物線上的動點， $d(P, L)$  表示為點  $P$  到  $L$  的距離，則下列敘述何者正確？

- (1) 圓心為  $P$ ，半徑為  $\overline{PF}$  長的動圓與  $L$  相切
- (2)  $\overline{PF}$  的最小值為  $\overline{VF}$
- (3) 焦弦長的最小值為  $4\overline{VF}$
- (4) 滿足  $\triangle PVF$  為正三角形的  $P$  點恰有 2 個
- (5) 若一定點  $A$  與  $F$  分別在  $L$  的異側，則  $\overline{PA} + d(P, L)$  的最小值為  $\overline{AF}$

2. 已知一橢圓  $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的兩個焦點分別為  $F_1, F_2$ ， $P(x, y)$  為此橢圓上的動點，則下列敘述何者正確？

- (1) 圓心為  $P$ ，半徑為  $\overline{PF_1}$  長的動圓與圓心為  $F_2$ ，半徑為  $2a$  的圓內切
- (2) 若  $\Gamma_1$  以原點為中心旋轉有向角  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )，則動點  $P(x, y)$  經此旋轉變換後坐標變為  $(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$
- (3) 若  $\Gamma_1$  以原點為中心經某個伸縮變換後方程式變為  $x^2 + y^2 = 1$ ，則動點  $P(x, y)$  經此伸縮變換後坐標變為  $(ax, by)$
- (4) 通過原點與  $x$  軸正向夾有向角  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) 的直線與  $\Gamma_1$  在第一象限之交點坐標可表示為  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$
- (5) 已知  $\Gamma_1$  的內接正方形四邊皆平行坐標軸，則  $\Gamma_1$  的內接正方形面積為  $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$

3. 已知雙曲線  $\Gamma_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的兩個焦點分別為  $F_1, F_2$ ， $P、Q$  為此  $\Gamma_2$  上的動點，則下列敘述何者正確？

(1) 圓心為  $P$ ，半徑為  $\overline{PF_1}$  長的動圓與圓心為  $F_2$ ，半徑為  $2a$  的圓外切

(2)  $\Gamma_2$  之共軛雙曲線 方程式可表示為

$$\left| \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{a^2 + b^2})^2} - \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{a^2 + b^2})^2} \right| = 2b$$

(3) 若  $\overline{PQ}$  為過  $F_1$  的正焦弦，則  $\triangle PQF_2$  的周長為  $4a + \frac{4b^2}{a}$

(4)  $\Gamma_2$  之方程式可表示為  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

(5) 與  $\Gamma_2$  有相同的漸進線的雙曲線方程式可表示為  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \pm k$ ，其中  $k > 0$

4. 有關方程式所表示的圖形，下列選項何者正確？

(1)  $25(x^2 + y^2) = (3x - 4y)^2$  所表示的圖形為拋物線

(2)  $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = |y + 2| + 2$  所表示的圖形為拋物線

(3)  $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 3$  所表示的圖形為橢圓

(4)  $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} - \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 4$  表示的圖形為一射線

(5)  $xy = 1$  所表示的圖形為雙曲線

## 二、填充題（占 60 分）

說明：第 5 題至第 14 題。

答對題數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10

得分 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60

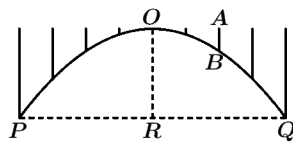
5. 已知一拋物線的焦點為  $F(-1, -1)$ ， $L: x = 5$  為準線，則此拋物線之標準式為【       】。

6. 已知一橢圓的兩焦點分別為  $F_1(1, \sqrt{3})$  及  $F_2(1, -\sqrt{3})$  且通過點  $A(3, \sqrt{3})$ ，則此橢圓之標準式為【       】。

7. 已知一雙曲線的兩條漸進線分別為  $L_1: 2x + y = 0$  及  $L_2: 2x - y = -4$ ，且有一焦點為  $F_1(-1, 2 + \sqrt{5})$ ，則此雙曲線之標準式為【      】。

8. 設  $A, B$  皆為正數，已知一橢圓  $\frac{x^2}{3A} + \frac{y^2}{2B} = 1$  與一雙曲線  $\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{4B} = 1$  共焦點，且此雙曲線通過點  $(-3, 2)$ ，則數對  $(A, B) =$ 【      】。

9. 有一座拋物線的拱橋，橋面與拱門之間用很多根與橋面垂直的柱子固定，如下圖所示。當河水面寬  $\overline{PQ} = 36$  公尺時，拱頂  $O$  與水面的距離  $\overline{OR} = 12$  公尺，則在橋面上與拱頂  $O$  距離 9 公尺處的  $A$  點所豎立的柱子  $\overline{AB}$  長為【      】公尺。



10. 設一橢圓  $\Gamma_3$  的兩個焦點分別為  $F_1, F_2$ ，中心為  $O$ ，另外有一拋物線  $\Gamma_4$  的頂點為  $O$ ，焦點為  $F_1$ ，已知點  $P$  為  $\Gamma_3$  與  $\Gamma_4$  的一個交點，且為通過  $F_1$  的正焦弦的一個端點，且  $\overline{PF_1} \times \overline{PF_2} = 8 - 4\sqrt{2}$ ，則  $\Gamma_3$  之短軸長為【      】。

11. 已知  $\Gamma_5$  與  $\Gamma'_5$  互為共軛雙曲線， $\Gamma_5$  的貫軸平行坐標軸以及其中一焦點坐標為  $(5, 3)$ ，而  $\Gamma'_5$  的一個貫軸頂點坐標為  $(2, 5)$ ，則  $\Gamma_5$  上任一點到兩漸進線的距離乘積為【      】。

12. 已知拋物線  $x = 2y^2$ ，將其圖形沿向量  $\vec{\ell} = (h, k)$  平移  $\Gamma_6$  到且  $\Gamma_6$  通過  $(1, 1), (3, 2)$  兩點，則  $\Gamma_6$  之焦點坐標為【      】。

13. 設  $x, y \in \mathbb{R}$ ，且滿足  $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ ，則  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2$  最大值為【      】。

14. 已知有一橢圓方程式為  $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$ ，且長軸所在直線為  $y = 2x$ ，則此橢圓在第一象限的焦點坐標為【      】。

第貳部分：混合題（占 8 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

15 — 16 題組

設  $k \in \mathbb{R}$ ，已知方程式  $kx^2 + (2 - k)y^2 - 2x - 2y = 0$  所表示的圖形可為圓、拋物線、橢圓或雙曲線

15. 試問當  $k$  為何值時圖形為圓？(單選題，2 分)

(1) -1

(2) 0

(3) 1

(4) 2

(5) 3

16. 試就  $k$  值討論方程式  $kx^2 + (2 - k)y^2 - 2x - 2y = 0$  所表示的剩餘圖形。(非選擇題，6 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 1235 2. 125 3. 235 4. 245

5.  $(y+1)^2 = -12(x-2)$

6.  $\frac{(x-1)^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$

7.  $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$

8. (6, 2)

9. 3

10.  $2\sqrt{2}$

11.  $\frac{20}{9}$

12.  $\left(\frac{9}{8}, 1\right)$

13. 25

14. (1, 2)

第貳部分：混合題

15. 3

16.  $k = 0$  或 2 拋物線； $0 < k < 2$  且  $k \neq 1$  橢圓； $k > 2$  或  $k < 0$  雙曲線