

112 學年度第一學期第一次定期高二數 A 試題

命題範圍：第一章三角函數

一、多重選擇題(每題 8 分，共 32 分)

每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 以下各項敘述，請選出正確的選項。

(1) $\cos 1 < \cos 1^\circ$

(2) $\sin(180 - \theta) = \sin \theta$

(3) $\cos \pi^2 < \cos \frac{5\pi}{4}$

(4) 若 α, β 是任意實數，則 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

(5) $\cos 110^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 220^\circ}{2}}$

2. 以下各項敘述，請選出正確的選項。

(1) $y = \sin 4x$ 的週期是 8π

(2) $y = 2 \cos 3x$ 的函數圖形對稱 y 軸

(3) $y = \tan x$ 與 $y = 2023$ 的函數圖形恰有一個交點

(4) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形可由 $y = \cos 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 而得

(5) 方程式 $2 \sin x + \sqrt{3} \cos x = -3$ 在 $0 \leq x < 2\pi$ 的範圍內有解

3. 以下各項敘述，請選出正確的選項。

(1) 將 $y = \sin x$ 的圖形鉛直伸縮 3 倍，可得 $y = 3 \sin x$

(2) 將 $y = \sin x$ 的圖形水平伸縮 3 倍，可得 $y = \sin 3x$

(3) 將 $y = \sin x$ 的圖形先鉛直伸縮 2 倍，再水平伸縮 3 倍，可得函數 $y = f_1(x)$ ；將 $y = \sin x$ 的圖形先水平伸縮 3 倍，再鉛直伸縮 2 倍，可得函數 $y = f_2(x)$ ，可知 $f_1(x) = f_2(x)$

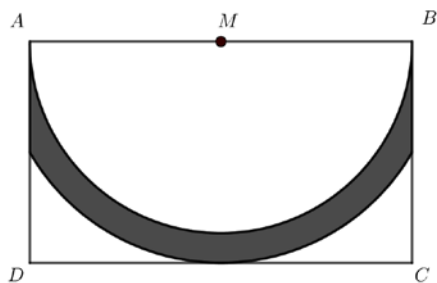
(4) 將 $y = \sin x$ 的圖形先水平伸縮 2 倍，再向右平移 3 單位，可得函數 $y = g_1(x)$ ；將 $y = \sin x$ 的圖形先向右平移 3 單位，再水平伸縮 2 倍，可得函數 $y = g_2(x)$ ，可知 $g_1(x) = g_2(x)$

(5) 將 $y = \sin x$ 的圖形先向上平移 2 單位，再向右平移 3 單位，可得函數 $y = h_1(x)$ ；將 $y = \sin x$ 的圖形先向右平移 3 單位，再向上平移 2 單位，可得函數 $y = h_2(x)$ ，可知 $h_1(x) = h_2(x)$

4. 已知函數 $f(x) = (\cos x - 3\sin x)(\cos x - \sin x)$ ，請選出正確的選項。
- (1) $f(x)$ 的最大值是 $\sqrt{20}$
 - (2) $f(x)$ 是週期函數，且週期是 π
 - (3) 函數 $f(x)$ 的振幅比函數 $g(x) = \sin x + 2\cos x$ 的振幅大
 - (4) 在坐標平面上，若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 為 $y = f(x)$ 與 $y = 1.5$ 的函數圖形在第一象限中距離 y 軸最小的兩個交點，則函數值 $f(x_1 + x_2)$ 大於 1
 - (5) $f(x)$ 在區間 $\left(\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 遞減

二、填充題(每題 6 分，共 48 分)

5. 平面上有一矩形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AD} = 4\sqrt{3}$ ， M 為 $\overline{AB}$ 中點，以 M 為圓心，分別以 $\overline{AM}$ 、 $\overline{AD}$ 為半徑作圓弧，與矩形 $ABCD$ 圍成灰色區域如下圖，則灰色區域面積為__ (5) __。



6. 已知 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ， $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ， $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ， $\cos \beta = \frac{4}{5}$ ，則

$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{1cm}} (6) \underline{\hspace{1cm}}$ 。

7. 已知 $\pi < \theta < 2\pi$ ， $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ ，則 $\sin 2\theta + \cos \frac{\theta}{2} = \underline{\hspace{1cm}} (7) \underline{\hspace{1cm}}$ 。

8. 在 $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ 的範圍內，則不等式 $2\sin x \geq 1$ 的解為__ (8) __。

9. 已知方程式 $10\sin x + 10\cos x = \sqrt{2}x$ ，則方程式有__ (9) __個實數解。

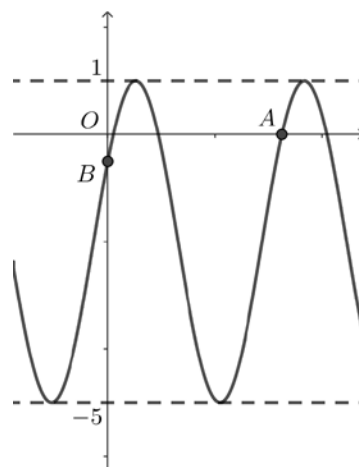
10. 右圖為 $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ 的部分圖形，

其中 $a > 0$ ， b 是正整數， $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$ ，

O 為原點， A, B 分別為 $y = f(x)$ 與 x 軸

, y 軸的交點，且 $\overline{OA}$ 長度約為 3.24， $B(0, -0.5)$ ，

則 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{1cm}}(10)\underline{\hspace{1cm}}$ 。



11. 有一個半徑 30 公尺靜止的圓形摩天輪，中心離地高度為 50 公尺。摩天輪上有一車箱 A 離地高度為 70 公尺，已知摩天輪開始運轉時，車箱 A 離地高度下降，若旋轉速率固定且繞行一圈需 24 分鐘，則 8 分鐘後，車箱 A 離地高度為 $\underline{\hspace{1cm}}(11)\underline{\hspace{1cm}}$ 公尺。

12. 在坐標平面上有一直線 $L: y = 2x$ 及線外一點 $A(4, 5)$ ，已知直線 L' 過 A 點且斜率為負，若 L 與 L' 的一個銳交角為 α ，其中 $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ ，則 L 、 L' 及 x 軸所圍成的三角形面積為 $\underline{\hspace{1cm}}(12)\underline{\hspace{1cm}}$ 。

三、計算證明題(2 題，共 20 分)

13. 坐標平面上有一個三角形 ABC ， B 為原點， C 的坐標為 $(3, 0)$ ， A 在第二

象限， $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ， $\overline{AB} = 6$ ， D, E 兩點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ ，

試回答下列問題：

(1) A 點的直角坐標為何？(3 分)

(2) $\tan \angle DBE = ?$ (7 分)

14. 已知 $0 \leq x \leq \pi$ ，設 $f(x) = 4 \sin x + \cos x$ ，當 $x = \alpha$ 時， $f(x)$ 有最大值 M ；當 $x = \beta$ 時， $f(x)$ 有最小值 m ，試求 $M, m, \cos \alpha, \cos \beta$ 。(10 分)