

112 學年度第二學期第三次定期考高二數 A 試題

命題範圍：第四章矩陣

一、是非題（共 8 題，每題 1 分，占 8 分）

1. 設 A 為二階方陣， I 為二階單位方陣，則 $(A-3I)^2=A^2-6A+9$ 。
2. 設 A 、 B 均為二階可逆方陣，則 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ 。
3. 設 A 、 B 均為二階方陣， O 為二階零方陣，若 $\det A \neq 0$ ，且 $AB=O$ ，則 $B=O$ 。
4. 設 A 為二階方陣， I 為二階單位方陣。若 $A^5=I$ ，則 A^2 有乘法反方陣。

5. 若三元一次方程組的增廣矩陣，經高斯消去法化簡後為
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

則此方程組有無限多組解。

6. 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $2A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 。
7. 若 $A=\begin{bmatrix} 2 & b \\ c & -1 \end{bmatrix}$ ，且 $A^2=A$ ，則 A 的乘法反方陣不存在。
8. 坐標平面上的三角形，經過二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 變換後，其面積與原三角形面積相同。

二、多重選擇題（共 4 題，每題 8 分，占 32 分）

說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 設二階方陣 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為在坐標平面上定義的線性變換， O 為原點。已知 M 將坐標平面上兩點 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ 分別映射到 $A'(1,-1)$ 、 $B'(3,2)$ 。試選出正確的選項。

$$(1) M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) M 為可逆方陣

(3) 若 M 將點 $C(2,3)$ 映射至點 C' ，則 $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OA'} + 3\overrightarrow{OB'}$

(4) 若 M 將線段 $\overline{AB}$ 的中點 D 映射至點 D' ，則 D' 也是線段 $\overline{A'B'}$ 的中點

(5) 若不共線相異三點 P 、 Q 、 R 經 M 變換後得 P' 、 Q' 、 R' 三點，
則 P' 、 Q' 、 R' 必不共線。

2. 設 A 、 B 、 X 均為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零方陣，滿足 $BA + AB = I$ ， $A^2 = B^2 = O$ 。令 $C = A + B$ ， $D = AB$ 。試選出正確的選項。

(1) $C^2 = I$

(2) $D^2 = O$

(3) $ABA + BAB = C$

(4) 若 $BX = O$ ，則 $DX = O$

(5) 若 $DX = O$ ，則 $BX = I$

3. 坐標平面上，設 A 表示以直線 $y = \sqrt{3}x$ 為鏡射軸的鏡射矩陣；設 B 表示以原點為中心，逆時針旋轉 30° 的旋轉矩陣。試選出正確的選項。

(1) A 、 B 將點 $(1, 1)$ 映射到同一點

(2) $(A^2 - B^2) = (A + B)(A - B)$

(3) $A^2B = BA^2$

(4) $A^6 = B^6$

(5) $ABAB = BABA$

4. 對矩陣 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$ 作列運算若干次後，可得矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

試選出正確的選項。

(1) 空間中三平面 $E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ ， $E_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ，

$E_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ，交於一線

(2) 三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 有無限多組解

(3) 平面上相異三直線 $L_1: a_1x + b_1y = c_1$ ， $L_2: a_2x + b_2y = c_2$ ，

$L_3: a_3x + b_3y = c_3$ 交於一點

(4) 設 $\vec{\alpha} = (a_1, b_1, c_1)$ ， $\vec{\beta} = (a_2, b_2, c_2)$ ， $\vec{\gamma} = (a_3, b_3, c_3)$ 為空間中三向量，

則 $\vec{\gamma} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \neq 0$

- (5) 設 $\vec{\alpha} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{\beta} = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{\delta} = (7, -3, 1)$ 為空間中三向量，
則 $\vec{\delta} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = 0$

三、填充題（共 10 格，每格 6 分，占 60 分）

1. 設方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ，若二階方陣 P 與 Q 滿足

$$A = 3P + Q, B = P - 3Q, \text{ 則}$$

(1) $PQ = \underline{\hspace{2cm}} (1) \hspace{2cm}$ 。

(2) 若二階方陣 X ，滿足 $BX = 3A$ ，則 $X = \underline{\hspace{2cm}} (2) \hspace{2cm}$ 。

2. 坐標平面上，向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ， $\vec{c} = (c_1, c_2) = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ 。

已知二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ ，

則數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}} (3) \hspace{2cm}$ 。

3. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c 為實數。若行列式值 $\det(A) = \frac{1}{3}$ ，

則 $\det(A + A^{-1})$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}} (4) \hspace{2cm}$ 。

4. 設空間向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ， $\vec{b} = (-2, 2, 2)$ ， $\vec{c} = (-3, 0, -1)$ ，

$\vec{d} = (1, k+1, k)$ ，已知 $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，其中 x, y, z 為實數，則實數 k 的值為 $\underline{\hspace{2cm}} (5) \hspace{2cm}$ 。

5. 設直線 $L: y = mx$ 經過二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ 變換後的直線仍為 L ，

則 m 的值為 $\underline{\hspace{2cm}} (6) \hspace{2cm}$ 。（有二解）

6. 已知矩形 $OPQR$ 的四個頂點坐標為 $O(0, 0)$, $P(2, 0)$, $Q(2, 1)$, $R(0, 1)$ 。分別將此四個頂點沿 x 軸方向(水平方向)推移 y 坐標的 k 倍 ($k > 0$)，得 O', P', Q', R' 四點，若此四邊形 $O'P'Q'R'$ 為菱形，則 k 的值為 $\underline{\hspace{2cm}} (7) \hspace{2cm}$ 。

7. 設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $(I+B)^{10} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$,

則 $a+b+c+d+e+f$ 的值為 (8)。

8. 已知 a, b, c 為實數，且方程組
$$\begin{cases} ax-2y+3z=2 \\ 6x+by+z=5 \\ 3x+4y+(b+1)z=3 \end{cases}$$
 恰有一組解，又此方程

組經過一系列的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & c & \frac{7}{3} \\ 0 & c & 3 & 2 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{array} \right]。$$

則有序數組 $(a, b, c) =$ (9)。

9. 某高中有數千名學生，其在校上學期間，中午用餐方式分為自備、外食兩種。經長期調查發現：

①若當日用餐為自備的學生，則隔天會有 30% 轉為外食；

②若當日用餐為外食的學生，則隔天會有 20% 轉為自備。

假設在該校學生不變動，本週亦無放假的情形下。已知今日(星期一)用餐自備人數與外食人數占學生總人數的比例分別為 40%，60%，則經過四天後(即星期五)當日外食人數占學生總人數的比例為 (10) %。