

台中市衛道高中 112 上高二第二次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 88 分）

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。

1. 試比較下列各數的大小：

$$a = (-3)^3, b = (0.9)^{0.9}, c = \sqrt[112]{112}, d = \log(\sin 90^\circ), e = \log(\sin 30^\circ)$$

- (1) $e < a < b < d < c$
- (2) $a < d < e < b < c$
- (3) $a < e < b < d < c$
- (4) $a < e < d < c < b$
- (5) $a < e < d < b < c$

2. 試問 $\log(2 + \sqrt{3})$ 、 $\log(2 - \sqrt{3})$ 、 $-\log(2 + \sqrt{3})$ 、 $-\log(2 - \sqrt{3})$ 、 $\log 2 + \log \sqrt{3}$ 這五個數中共有多少個不同的實數？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

3. 已知方程式： $10^x + x - 4 = 0$ 的解為 $x = \alpha$ ， $\log x + x - 4 = 0$ 的解為 $x = \beta$ ，試求 $10^\alpha + \log \beta$ 之值為下列何者？

- (1) -4
- (2) 0
- (3) 2
- (4) 4
- (5) 8

4. 對某數 N 取一次 $\log$ 後，其值為 x ，再對 x 取一次 $\log$ 後，其值為 112，試問 N 是幾位數？

- (1) 112 位
- (2) 113 位
- (3) 10^{112} 位
- (4) $10^{112} + 1$ 位
- (5) $10^{10^{112}}$ 位

二、多選題（占 15 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

5. 下列選項何者正確？

- (1) $\frac{7^{100} + 1}{7^{81} + 1} > \frac{7^{99} + 1}{7^{80} + 1}$
- (2) 若 $0 < a < 1$ ，則 $a^a > a^{a^a}$
- (3) 設 $2^x = 3$ ， $3^y = 4$ ，則 $x + y < 2\sqrt{2}$
- (4) 設 a 、 b 、 c 、 d 皆為不等於 0 之實數，若 $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{3}\right)^b$ 且 $2^c = 3^d$ ，則 $ad = bc$
- (5) 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ，則 $a^3 = 3$

6. 下列選項何者正確？

- (1) 設 $a > 1 > b > 0$ ，則 $\log_a 1 > \log_b 1$
- (2) 設 $a > 1 > b > 0$ ，則 $\log_a b \geq \log_b a$
- (3) $\log_2 11 < 3.5$
- (4) 設 $a > 1$ 且 $b > 1$ ，若 $\log_b a = \frac{9}{4} \log_a b$ ，則 $a^2 = b^3$
- (5) 設 a 、 b 、 c 為實數且滿足 $\log a = 1.1$ 、 $\log b = 2.2$ 、 $\log c = 3.3$ ，則 a 、 b 、 c 成等比數列

7. 下列選項何者正確？

(1) $2^{1.301} + 2^{2.699} > 2^3$

(2) $y = \log_5(x-1)$ 的圖形無法由 $y = \log_{10} x$ 平移伸縮而得

(3) 兩方程式 $2^x - x^2 = 0$ 與 $x - \log_2 |x| = 1$ 實根個數相同

(4) 已知 $a > 1$ ，則 $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 沒有交點

(5) $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (\log \sqrt{7} - \log \sqrt{6}) > (\sqrt{7} - \sqrt{6}) \times (\log \sqrt{3} - \log \sqrt{2})$

三、填充題（占 55 分）

說明：第 8 題至第 18 題，每題 5 分。

8. 試求指數方程式 $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$ 所有可能解 x 之總和為 8-1。

9. 試化簡 $\log_4 27 \times \log_9 5 \times \log_{125} 4 = \frac{\textcircled{9-1}}{\textcircled{9-2}}$ 。

10. 試求 $\log_2(x+4) + \log_2(x-2) \leq 4$ 結果，得 x 的範圍為 10-1 $< x \leq$ 10-2。

11. 若 x, y 為兩正實數，且滿足 $x^{-\frac{1}{3}}y^2 = 1$ 及 $2\log y = 1$ ，

則 $\frac{x - y^2}{9} = \frac{\textcircled{11-1} \textcircled{11-2} \textcircled{11-3}}{\textcircled{11-4}}$ 。

12. 若 $1 \leq x \leq 1000$ ，試求 $y = x^{2-\log x}$ 之最大值為 12-1 12-2。

13. 若 $\log_{\frac{1}{3}} [\log_2 (\log_5 x)] \geq 0$ 之 x 範圍為 $a < x \leq b$ ，

試求 ab 乘積為 13-1 13-2 13-3。

14. 已知一直角三角形的兩股長分別為 $\frac{\log 8}{\log 9}$ 與 $\frac{\log 4}{\log 3}$ ，

若此直角三角形的周長為 $\log_3 x$ ，則 $x = \frac{14-1}{14-2}$ 。

15. 方程式 $4 \cdot 8^x - 8 \cdot 4^x + 5 \cdot 2^x - 11 + 5 \cdot 2^{-x} - 8 \cdot 4^{-x} + 4 \cdot 8^{-x} = 0$ ，

試求 $x = \frac{15-1}{15-2}$ 。

16. 已知 $a > 1$ ，當 $0 \leq x \leq 2$ 時， $y = a^{x^2-3x+3}$ 的最小值為 $\frac{27}{8}$ ，

試求 $a = \frac{16-1}{16-3} \cdot \frac{16-2}{16-4}$ 。(化為最簡分數)

17. 十項實數數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1 = \log_{10} 36$ ，則 a_{10} 有 $\frac{17-1}{17-2}$ 種可能的值。

18. 設兩相異點 A, B 分別為 $y = x$ 與 $y = \log_a x$ 的交點，若 O 為原點，且 A 點恰為 $\overline{OB}$ 的中點，試求 $\overline{OA}^2$ 為 $\frac{18-1}{18-2}$ 。

第貳部分：混合題（占 10 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

19 — 20 題組

根據**牛頓冷卻定律**可知：如果物體的初始溫度為攝氏 a 度，當時的環境溫度為攝氏 b 度，設經過 t 小時後，物體的溫度為攝氏 $f(t)$ 度，則 $f(t) - b = (a - b) \times e^{-rt}$ ，其中 r 為與物體有關的一個常數， e 為自然常數。

19. 若將魚從冰箱冷凍庫 (-5°C) 拿出來在室溫 27°C 下解凍，過了一個小時後，其溫度約為 11°C ，是利用上述條件計算 e^{-r} 的近似值為下列何者？(單選題，5 分)

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) 2

(5) 4

20. 承 19 題，試求兩個小時後，魚的溫度大約為何？(非選擇題，5 分)

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 5 2. 3 3. 4 4. 4

5. 124 6. 345 7. 13

8. 3

9. $\frac{1}{2}$

10. $2 < x \leq 4$

11. 110

12. 10

13. 125

14. 64

15. ± 1

16. $\frac{81}{16}$

17. 5

18. 8

第貳部分：混合題

19. 2

20. 19°C