

# 新竹市新竹高中 112 上高一第二次期中考

## 一、多選題（占 12 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

1. 下列關於多項式的敘述，哪些是正確的？

(1) 若  $(x^2 + 1)f(x)$  除以  $x + 2$  的餘式為 3，則多項式  $f(x)$  除以  $x + 2$  的餘式為  $\frac{3}{x^2 + 1}$

(2) 若  $f(x), g(x)$  分別為三次、四次多項式，則  $f(x)$  除以  $g(x)$  的餘式為  $f(x)$

(3) 若多項式  $f(x)$  除以  $x^2 - 5x + 6$  的餘式為  $4x + 1$ ，則  $f(x)$  除以  $x - 2$  的餘式為 9

(4) 若多項式  $f(x)$  除以多項式  $g(x)$  的商式為  $h(x)$  而餘式為  $r(x)$ ，

則  $f(x)$  除以  $\frac{1}{3}g(x)$  的商式為  $3h(x)$  而餘式為  $r(x)$

(5) 若多項式  $f(x)$  不是零多項式，則  $f(x)$  是  $\frac{1}{1124}f(x)$  的因式

2. 右圖中，甲為函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的圖形而乙為函數

$g(x) = -(x - 1)(x - 3)(x - 5)$  的圖形，又設乙的對稱中心

為點  $(x_0, y_0)$ 。以下哪些敘述正確？

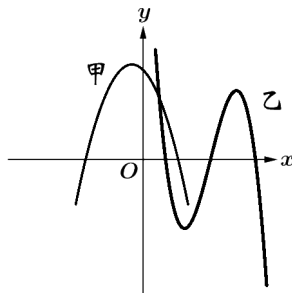
(1)  $b^2 - 4ac > 0$

(2)  $|100a + 10b + c| > |100a - 10b + c|$

(3) 一次函數  $h(x) = abx + c$  的圖形和乙有兩個交點

(4) 甲和乙恰有兩個交點

(5) 使用  $g(x)$  在  $x = x_0$  附近的一次近似，可估計  $g(x_0 - 0.001) \doteq -0.004$



## 二、填充題（占 72 分）

說明：第 3 題至第 14 題。

|:—|

|\*\* 答對題數 \*\*| 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|

|\*\* 得分 \*\*| 0|10|20|28|36|42|48|53|58|62|66|69|72|

3. 若  $x - 2$  為多項式  $x^6 + kx^2 - 15x + 6$  的因式，求  $k =$ 【      】。

4. 設函數  $f(x) = ax + 3a$  的圖形與  $y$  軸交於點  $P$  若  $P$  的  $y$  坐標為 8，

求  $\frac{f(11) - f(24)}{11 - 24} =$ 【      】。

5. 設函數  $f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 6)^2$ ， $0 \leq x \leq 7$ 。若  $f(x)$  的最大值為  $M$  而最小值為  $m$ ，求數對  $(M, m) =$ 【      】。

6. 若三次多項式  $f(x)$  滿足  $f(2) = f(3) = 0$ ， $f(1) = -6$ ， $f(-2) = 240$ ，

求  $f(x)$  除以  $x - 4$  的餘式  $=$ 【      】。

7. 設  $P(0, 5)$ ,  $Q(2, 9)$  及的中點  $M$  都在三次函數  $f(x)$  的圖形上。若  $f(x)$  在  $x = 1$  附近的一次近似的圖形是一條水平直線，求  $f(x)$  在  $x = 2$  附近的一次近似  $=$ 【      】。

8. 不等式  $(x^2 - 4)(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 4x - 5) \leq 0$  的解為【      】。

9. 若多項式  $f(x) = 4x^3 + ax^2 + 22x$  除以多項式  $x^2 + 2x + 6$  的餘式為  $4x + 18$ ，求不等式  $f(x - 6) \leq 0$  的解為【      】。

10. 設  $f(x)$  為多項式。若  $(x^2 - 5x + 6)f(x)$  除以  $x^2 + 2x + 3$  的商式為  $g(x)$  而餘式為  $-27x - 45$ ，求  $g(x)$  除以  $x^2 - 5x + 6$  的餘式  $=$ 【      】。

11. 若三次函數  $f(x)$  的圖形與函數  $g(x) = x^2$  的圖形交於三點  $(3, 9)$ ,  $(4, 16)$ ,  $(6, 36)$  且  $f(-2) = -56$ ，求  $f(8) =$ 【      】。

12. 已知二次函數  $f(x)$  的最大值為  $-12$  而三次函數  $g(x) = xf(x)$  滿足  $g(2) + g(-2) = 0$ 。另外又知道，若一次函數  $h(x)$  的圖形通過點  $P(2, g(2))$  和  $Q(-2, g(-2))$  兩點，那麼，「每當  $x$  增加 1 單位， $h(x)$  的函數值就相應地減少 15 單位」。求  $f(x) =$ 【      】。

13. 阿誠在手機上發現一套免費的數學軟體，如獲至寶，欣然冷落手機遊戲而熱切地和這套軟體結伴玩數學。偶然間，他發現，在直角坐標平面上，若將函數  $f(x) = x^2 + 3x + 3$  的函數值乘以  $k$  倍，變成  $g(x) = k(x^2 + 3x + 3)$ ，那麼在  $g(x)$  的圖形隨著  $k$  不斷改變的過程中，有時候會看到「 $g(x)$  的圖形全部都在直線  $y = 3x + 9$  的下方，而且  $g(x)$  的圖形和直線  $y = 3x + 9$  不相交」的現象。請你幫阿誠求出發生這個現象的  $k$  值的範圍。答：【      】。

14. 已知三次函數  $f(x) = x^3 - 35x^2 - 112x + 13$  的圖形和  $x$  軸交於相異三點  $A(\alpha, 0), B(\beta, 0), C(\gamma, 0)$ ，求  $(38 - \alpha)(38 - \beta)(38 - \gamma) =$ 【              】。

### 三、計算題（占 16 分）

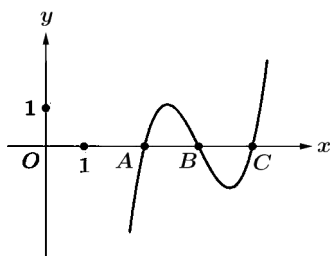
說明：第 15 題至第 16 題。

15. 設三次函數  $f(x) = (x - h)^3 - 2x + k$  的圖形與  $x$  軸交於  $A, B, C$  三點，其中  $\overline{BA} = \overline{BC}$  而  $B(4, 0)$ ，如圖所示。

(1) 求  $h, k$ 。(3 分)

(2) 利用圖，畫出函數  $g(x) = |f(x)|$  的圖形。(2 分)

(3) 利用 (2)，方程式  $|f(x)| = \frac{1}{2}$  共有幾個實根？並問這些實根的總和 = ？(3 分 = 1 分 + 2 分)



16. (1) 若函數  $f(x) = ax^3 + 7x^2 + bx + 2023$  使得等式  $f(5+x) = f(5-x)$  恆成立，求  $a, b$ 。(3 分)

(2) 設  $g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  為四次函數。試證：若直線  $x = 0$  及直線  $x = k$  都是  $g(x)$  的圖形的對稱軸，則  $k = 0$ 。(3 分)

(3) 設  $h(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$  為四次函數。請利用 (2)，證明：若直線  $x = k_1$  及  $x = k_2$  都是  $h(x)$  的圖形的對稱軸，則  $k_1 = k_2$ 。(2 分)

參考答案

1. 2345 2. 125

3.  $-10$

4.  $\frac{8}{3}$

5.  $(62, 14)$

6.  $-36$

7.  $6x - 3$

8.  $-2 \leq x \leq -1$  或  $x = 2$  或  $x = 5$

9.  $x \leq 6$

10.  $-2x + 13$

11. 74

12.  $-\frac{3}{4}x^2 - 12$

13.  $k < 3 - 2\sqrt{3}$

14. 89

15. (1)  $h = 4, k = 8$  ; (2) 略 ; (3) 6 個實根，總和 = 24

16. (1)  $a = 0, b = -70$  ; (2) 略 ; (3) 略

6