

高雄市鳳山高中 112 上高二第二次期中考

第壹部分：選擇（填）題（占 83 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1. 使 $\log_3 \left[\log_{\frac{1}{9}} (\log_{27} x) \right]$ 有意義的整數 x 共有幾個？

- (1) 24
- (2) 25
- (3) 26
- (4) 27
- (5) 無限多

2. 若 $a = \frac{1}{2}$ ，則下列哪個選項的數值最大？

- (1) a
- (2) a^a
- (3) $a^{(a^a)}$
- (4) $a^{(a^2)}$
- (5) $a^{(2^a)}$

3. 若直線 $x + y = 11$ 與 $y = \log_2 x$ 的圖形交於 P 點，且 $x + y + 11$ 與 $y = 2^x$ 的圖形交於 Q 點。同時 P 點也在直線 $y = 3$ 上， O 為原點，試求 $\triangle OPQ$ 的面積為多少平方單位？

- (1) 24
- (2) $\frac{33}{2}$
- (3) $\frac{55}{2}$
- (4) $\frac{77}{2}$
- (5) 48

4. 令函數 $f(n) = \frac{5^n + 4^n}{5^n - 4^n}$ ， n 為正整數，求滿足 $|f(n) - 1| < \frac{1}{10}$ 的最小正整數 n 為？

- (1) 12
- (2) 13
- (3) 14
- (4) 15
- (5) 16

5. 有一數列： $\log_4 1$ 、 $\log_4 2$ 、 $\log_4 3$ 、 $\dots$ 、 $\log_4 2023$ ，第 k 項為 $\log_4 k$ ，這 2023 個數其中有幾個是有理數？

- (1) 8
- (2) 9
- (3) 10
- (4) 11
- (5) 12

二、多選題（占 21 分）

說明：第 6 題至第 8 題，每題 7 分。(7-5-2-0)

6. 請選出敘述正確的選項。

- (1) $\log_4 0.8 = 2 \log_4 0.4$
- (2) $\log_{\frac{1}{2}} 0.2 > \log_{\frac{1}{2}} 0.4 > \log_{\frac{1}{2}} 0.8$
- (3) $\log_8 2025 > \frac{\log_8 2023 + \log_8 2027}{2}$
- (4) $0.4^{0.4} > 0.3^{0.3} > 0.2^{0.2}$
- (5) $3^{10} > \frac{3^5 + 3^{15}}{2}$

7. 觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真？

- (1) $10^x = 2023 - x$ 有實數解
- (2) $y = \log_{112} x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{112}} x$ 兩函數的圖形對稱於 y 軸
- (3) $y = 2023^x$ 的圖形恆在 $y = 23^x$ 的上方
- (4) $x > 0$ 時， $10^x > x^2$ 恆成立
- (5) 若點 $P(a, b)$ 在 $y = \log_9 x$ 的圖形上，則 P 和原點連成直線的斜率必小於 $\log_2 3$

8. 考慮坐標平面上滿足 $3^x = 5^y$ 的點 $P(x, y)$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $(0, 0)$ 是一個可能的 P 點
- (2) $(\log_3 5, \log_5 3)$ 是一個可能的 P 點
- (3) 所有可能的點 (x, y) 構成的圖形為一直線
- (4) P 點可能落在第二象限內
- (5) 點 (x, y) 滿足 $xy \geq 0$

三、填充題（占 36 分）

說明：第 9 題至第 14 題，每題 6 分。

9. 設 a 、 b 、 c 皆為異於 1 的正數，若 $ab^3c^5 = 1$ ，

則 $(2\log_a b + \log_{a^2} b) \times \log_b (3^{\log_3 b^6 c^{10}}) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

10. 設 $a = \log_2 3$ 、 $b = \log_{10} 12$ ，則 $9^{\frac{a-b+2}{ab}}$ 之值 = $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

11. 設 $a = \log \left(1 + \frac{1}{7}\right)$ 、 $b = \log \left(1 + \frac{1}{49}\right)$ ，試以 a 、 b 表 $\log 7 = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

12. 不等式： $\log_{\frac{1}{4}} x > \log_2 \frac{1}{x}$ 之解為 $\text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$ 。

13. 已知可將 $\left(\frac{3}{5}\right)^{100}$ 表示成科學記號為 $b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 為整數。

若 b 的整數部分為 a ，且 $\left(\frac{3}{5}\right)^{100}$ 在小數點後第 k 位數字開始不為 0，

則數對 $(a, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 心理學家常用數學模式 $L(t) = a \times (1 - 10^{-bt})$ 來描述學生經過 t 星期學習之後所得到的學習量 (或成果)，這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。如果大星一星期可以背熟 90 個單字，兩星期可以背熟 150 個單字，那麼利用這個數學模式，推算大星三星期可以背熟 個單字。

第貳部分：混合題（占 18 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

15 — 16 題組

設 $f(x) = \frac{9^x}{3 + 9^x}$

15. 證明： $f(x) + f(1 - x) = 1$ （非選擇題，4 分）

16. 求 $f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{2}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{4}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{6}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)$ 之值。（非選擇題，5 分）

17 — 18 題組

歐蜜 打算向銀行貸款 1000 萬元投資做生意，該銀行目前優惠貸款的年利率為 2.4%，期限為 10 年，試回答下列問題。

17. 若 1000 萬元貸款按月複利計算，10 年後一次還清之本利和最接近多少萬元？

（單選題，3 分）

- (1) 1268 萬
- (2) 12680 萬
- (3) 12710 萬
- (4) 1271 萬
- (5) 1240 萬

18. 若採本息平均攤還法（此為銀行常用的貸款的還款方式，其計算方式採每月複利計息一次，將貸款期間內全部貸款本金與利息平均分攤於每一期中償付，使得每期繳納相同的金額）分 120 個月還清，但該銀行願意貸款給民眾的房貸金額（本金）是以每月房貸支出（本利和）不超過月收入的二分之一為原則。歐蜜目前每月收入為 16 萬元，則歐蜜現能向銀行貸款的最高金額為多少萬元？

（單位為萬元，萬元以下無條件捨去不計）（非選擇題，6 分）

（已知： $(1.024)^{10} \approx 1.268$ ， $(1.002)^{120} \approx 1.271$ ）

參考答案

第壹部分：選擇（填）題

1. 2 2. 4 3. 3 4. 3 5. 4

6. 23 7. 145 8. 135

9. -5

10. 25

11. $\frac{6-a-3b}{7}$

12. $x > 1$

13. (6, 23)

14. 190

第貳部分：混合題

15. 略

16. $\frac{7}{2}$

17. 4

18. 755 萬元