

台南市台南女中 112 下高二第二次期中考

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1. 同時投擲三顆公正骰子一次，已知三顆點數的平均數為 3 的條件下，則中位數也為 3 的機率為下列哪一個選項？

(1) $\frac{25}{216}$

(2) $\frac{13}{216}$

(3) $\frac{1}{2}$

(4) $\frac{13}{25}$

(5) $\frac{2}{3}$

2. 若 $PQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ 且 $Q + R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，試問矩陣 P 為下列哪個選項？

(1) $4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 1 \\ 3 & \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$

3. 設 A 、 B 、 C 為樣本空間 S 的三個事件，已知 A 和 B 為獨立事件，且 $P(A) = \frac{1}{3}$

、 $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$ ，又 $P(C | A \cap B) = P(A \cap B | C)$ ，試問 $P(C)$ 之值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{2}$

(4) $\frac{2}{3}$

(5) $\frac{3}{4}$

4. 已知某地區有 20% 的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩種結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率為 90%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情形，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為 p ，而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為 p' ，試問 $\frac{p}{p'}$ 最接近下列哪一個選項？

(1) 15

(2) 16

(3) 17

(4) 18

(5) 19

二、多選題（占 10 分）

說明：第 6 題至第 11 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

6. 已知 A 、 B 、 C 均為二階方陣，且 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，是選出正確的選項。

- (1) 若 $AB = I$ ，則 $A^3B^3 = (AB)^3$
- (2) 若 $AB = O$ ，且 $\det B \neq 0$ ，則 $A = O$
- (3) $(AB)C = A(BC)$
- (4) 若 $AB = AC$ ，且 $A \neq O$ ，則 $B = C$
- (5) 若 $\det A \neq 0$ ，則 $\det(A + A) = 2 \det A$

7. 設 a, b, c 為實數，試問下列有關線性方程組
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + bz = -1 \\ 2x + 3y - z = c \end{cases}$$
 的敘述，哪些是正確的？

- (1) 若此線性方程組有解，則可能恰有一組解或有無限多組解
- (2) 若此線性方程組恰有一組解，則 $a + b \neq -1$
- (3) 若此線性方程組有解，則 $c = 0$
- (4) 若 $c = 0$ ，則此線性方程組有無限多解
- (5) 若 $a + b = -1$ ，則此線性方程組無解

8. 某校數學研究社由 4 名男生及 2 名女生組成，現從 6 人中任意選取兩人去參加數學科展競賽，試選出正確的選項。

- (1) 參賽的兩人中至少有 1 名女生的機率為 $\frac{2}{3}$
- (2) 參賽的兩人中至少有 1 名女生的條件下，兩人都是女生的機率 $\frac{1}{9}$
- (3) 參賽的兩人中「恰有 1 名男生」的事件與「恰有 1 名女生」的事件為獨立事件
- (4) 參賽的兩人中「恰有 1 名男生」的事件與「至少有 1 名女生」的事件為互斥事件
- (5) 參賽的兩人中「都是男生」的事件與「都是女生」的事件為相依事件(即不為獨立事件)

9. 已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $\det A = -1$ ， $a > 0$ ， $d > 0$ ， $B = \frac{A - A^{-1}}{2}$ ，試選出正確的選項。

(1) $bc > 0$

(2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(3) B^{-1} 必存在

(4) 存在一個方陣 A ，使得 $B^5 = \begin{bmatrix} 2024 & 113 \\ 113 & 2024 \end{bmatrix}$

(5) 若 $\det B = 64$ ，則 bc 的最大值為 33

10. 真美子 是一位籃球選手，已知真美子 第一次投籃的命中率為 60%，在前一球投進的情況下，下一次頭球的命中率可以提升到 70%，若前一球沒投進的情況下，下一次投球命中率會降至 50%，試選出正確的選項。

(1) 已知真美子 在前兩球都投進的條件下，第三球投進的機率為 0.294

(2) 真美子 連續投球兩次，恰命中一球的機率為 0.38

(3) 真美子 連續投球三次，恰命中一球的機率為 0.25

(4) 真美子 連續投球三次，已知恰命中一球的條件下，則是第三次才命中的機率為 0.04

(5) 若真美子 連續投球 n 次，且至少投進一球的機率超過 99%，則 n 的最小值為 6

11. 新年期間，公司在模彩箱中放入 10 個「幸運紅包」，讓 10 個員工每人一序抽出一個，取後不放回，直到所有紅包被抽完。已知其中有 4 個獎金 10000 元的大紅包，6 個獎金 100 元的小紅包，試選出正確的選項。

(1) 已知第一個員工抽中大紅包的條件下，第二個員工也抽中大紅包的機率為 $\frac{2}{5}$

(2) 前三個員工恰有一個員工抽到大紅包的機率為 $\frac{1}{4}$

(3) 已知前兩個員工抽到大紅包的條件下，最後一個員工抽到大紅包的機率為 $\frac{1}{4}$

(4) 已知第五個員工恰抽到最後一個大紅包的機率為 p_1 ，最後一個員工抽到最後一個大紅包的機率為 p_2 ，則 $p_1 > p_2$

(5) 已知沒有連續兩人抽到大紅包的條件下，第一、三、五、七位員工恰抽到 4 份大紅包的機率為 $\frac{1}{35}$

三、填充題（占 45 分）

說明：第 12 題至第 20 題，每題 5 分。

12. 設實係數二階方陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 。若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，試求序組 $(a, b, c, d) = (12-1, 12-2, 12-3, 12-4, 12-5)$ 。

13. 已知班上有 45 位同學，且男生人數多於女生人數，其中是否補習的人數，依性別列表如下。現在從班上任選一人，每人被選到的機率相等，若事件 A 表示選到有補習的事件，事件 B 表示選到女生的事件，且 A 與 B 為獨立事件，試求機率 $P(B | A') = \frac{13-1}{13-2}$ 。

	有補習	沒有補習
男	x	12
女	9	y

14. 已知甲袋中有 6 個白球，編號為 1、2、3、4、5、6，乙袋中有 3 個綠球，編號為 1、2、3，現在自甲袋中任取一球放入乙袋，再自己袋任取出一球，若從乙袋取出的一球編號為奇數的條件下，則此球為白球的機率為 $\frac{14-1}{14-2}$ 。

15. 研究發現某地居民有 15% 帶有甲種病毒，且甲種病毒帶菌者中罹患肝癌的比例佔 $a\%$ ，而非甲種病毒帶菌者中罹患肝癌的比例佔 $b\%$ 。若 100 個肝癌患者中有 90 個甲種病毒帶菌者，求 a, b 的比值 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 若 k 為實數，且方程組

$$\begin{cases} x - 3y - 5z = 11 \\ 2x - 5y - 7z = 24 \\ -3x + 10y + (k^2 - 18)z = k - 25 \end{cases}$$

有無限多組解，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 設 $\vec{a} = (1, 1, 3)$ ， $\vec{b} = (-2, 0, 2)$ ， $\vec{c} = (-3, -1, -1)$ ， $\vec{d} = (1, -1, k)$ ，已知 $\vec{d}$ 可表示為 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 的線性組合，即 $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，其中 x, y, z 為實數，試求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. 設 $a \in \{-1, 1, 2, 3\}$ ，且 $b \in \{0, -1, 1, 2\}$ ，已知 $a \neq b$ 的條件下，試問矩陣 $\begin{bmatrix} a & a^2 \\ b^2 & b \end{bmatrix}$ 沒有反方陣的

機率為 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2} \textcircled{18-3}}$ 。

19. 已知籤筒內有 1 號籤 1 支，2 號籤 2 支…，以此類推，直到 10 號籤 10 支，每支籤被抽到的機率均等。小芳 知道籤的總數，但是她誤以籤筒的籤是 1 到 n 號各一支，有人告訴小芳，她誤會了籤筒的狀況，小芳 半信半疑地同時抽兩支籤來檢驗，若抽出兩支籤同號，她就知道自己誤會了。小芳 隨即任意抽出兩支籤檢驗，真的出現兩支同號，試問小芳 檢驗後發現自己誤會的條件下，她抽到的是 2

支 7 號籤的機率為 $\frac{\textcircled{19-1}}{\textcircled{19-2} \textcircled{19-3}}$ 。

20. A 、 B 兩支足球隊打四連戰，比賽結果可以分出勝負或者和局收場。當每場比賽分出勝負時，勝利一方得 3 分，落敗一方得 0 分；若和局收場時，雙方各得 1 分。假設每場比賽 A 隊獲勝、平手、落敗的機率分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{3}$ ，且每場結果是獨立事件，四連戰結束後將四場比賽得分加總，試問 A 隊

總分大於 B 隊總分的機率為 $\frac{\textcircled{20-1} \textcircled{20-2} \textcircled{20-3}}{\textcircled{20-4} \textcircled{20-5} \textcircled{20-6}}$ 。

参考答案

1. 4 2. 2 3. 1 4. 3 5. 5

6. 123 7. 12 8. 25 9. 13 10. 23 11. 35

12. $(1, 1, -1, 0)$

13. $\frac{1}{3}$

14. $\frac{1}{5}$

15. 51

16. -6

17. 2

18. $\frac{4}{13}$

19. $\frac{7}{55}$

20. $\frac{229}{432}$

8