

112 學年度第一學期第一次定期考高三數乙試題

命題範圍：第一章極限與函數

(1-1 無窮等比級數、1-2 函數的概念、1-3 函數的極限)

一、填充題（每小題 4 分，共 40 分）

1. 判斷下列各數列為收斂或發散？若收斂，請寫出其極限值；若發散，請寫發散。

(1) $a_n = 1 + (0.99)^n$ (2) $b_n = (-1)^n$ (3) $c_n = 2$

(4) $d_n = \frac{1+2n}{3+4n}$ (5) $e_n = 5n + 6$

2. 判斷下列各函數的極限是否存在？若存在，請寫出其極限值；若不存在，請寫不存在。

($[x]$ 的定義是小於或等於 x 的最大整數，例如： $[2.5] = 2$ ， $[3] = 3$ ， $[-2.5] = -3$)

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{|x|}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 3} [x]$

(4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{4}{x-3} - \frac{12}{x^2 - 3x} \right)$

二、計算題（每(小)題 5 分，共 60 分）

3. 回答下列各小題：

(1) 試求 $\sum_{k=2}^{10} (k^2)$ 的值。

(2) 設 $\sum_{k=2}^{10} a_k = 1$ ， $\sum_{k=2}^{10} b_k = 2$ ，試求 $\sum_{k=2}^{10} (3a_k + 4b_k + 5)$ 的值。

4. 設 a, b 為實數，已知無窮等比級數 $a + a\left(\frac{2b}{1+b}\right) + a\left(\frac{2b}{1+b}\right)^2 + a\left(\frac{2b}{1+b}\right)^3 + \dots$ 為一個收斂級數，其中 $a \neq 0$ ， $b \neq 0, -1$ ，試求實數 b 的最大範圍為何？

5. 試將循環小數 $0.\overline{301}$ 化為有理數。

6. 已知函數 $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ ，試求：

(1) $f(x)$ 的定義域。

(2) $f(x)$ 的值域。

7. 已知兩函數 $f(x) = x + 2$ ， $g(x) = 3x^2 - 4$ ，試求：

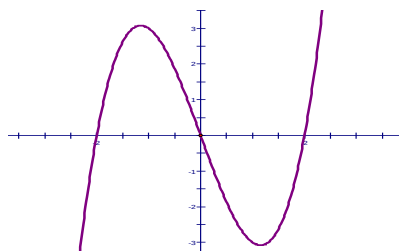
(1) 合成函數 $(f \circ g)(x)$ 。

(2) 合成函數 $(g \circ f)(x)$ 。

8. 右圖為 $f(x) = x^3 - 4x$ 的函數圖形，已知此函數圖形對稱於原點，試問：

(1) $f(x)$ 的函數圖形在哪個區間凹口向上？

(2) $f(x)$ 的函數圖形在哪個區間凹口向下？



9. 設 a 為實數，已知函數 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 5 \\ 3x^2 + 4x + a, & x < 5 \end{cases}$ 為連續函數，試求實數 a 值。

10. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $4x + 2 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 3$ ，其中 x 為任意實數，試求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 的值。