

台中市文華高中 112 上高三第一次期中考

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1. 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $2n + 2 < na_n < 2n + 3$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 之值為何？

- (1) 不存在
- (2) 0
- (3) 1
- (4) 2
- (5) 3

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|-x^2 + 4x + 3| - 2}{x + 1} = ?$

- (1) 不存在
- (2) 0
- (3) -2
- (4) -3
- (5) -6

3. 設 a 為實數， $f(x) = 2x + 1$ ， $g(x) = ax + 2$ ，若 $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ，試求 a 的值？

- (1) 3
- (2) 2
- (3) 1
- (4) 0
- (5) -1

4. 試求 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^5 + 1}{x+2} = ?$

- (1) -5
- (2) -2
- (3) 0
- (4) 2
- (5) 5

5. 設 a 、 b 為循環小數， $a = 0.\overline{12}$ ， $b = 0.\overline{02}$ ，則 $a - b$ 的值是下列哪一個選項？

- (1) 0.11
- (2) 0.1111
- (3) $\frac{1}{9}$
- (4) $\frac{10}{99}$
- (5) $\frac{100}{999}$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 6 題至第 11 題，每題 5 分。(5-3-1-0)

6. 試選出極限值為 0 的選項？

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - 2)^n$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times (-0.99)^n$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6.14}{3 + \pi} \right)^n$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$

7. 下列各無窮級數中，何者為收斂級數？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (-1)^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{101}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{7^{n-3}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right)$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

8. 關於數列的極限，下列哪些選項的敘述是正確的？

(1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，則數列 $\left\langle a_n + \frac{1}{n} \right\rangle$ 為收斂數列

(2) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，則數列 $\langle a_n - n \rangle$ 為發散數列

(3) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，則數列 $\left\langle \frac{a_n}{(0.5)^n} \right\rangle$ 為收斂數列

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(5) 若無窮級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

9. 下列哪些函數是偶函數？

(1) $f_1(x) = (x+2)^2$

(2) $f_2(x) = x^4 + 3$

(3) $f_3(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$

(4) $f_4(x) = \cos x$

(5) $f_5(x) = |\sin x|$

10. 若 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6, & x > 2 \\ [x], & x \leq 2 \end{cases}$ ，(其中 $[x]$ 為高斯函數)，則下列敘述何者正確？

(1) $f(2) = 2$

(2) $f(x)$ 的最大值是 6

(3) $f(x)$ 在 $x = 0$ 處極限不存在

(4) $f(x)$ 在 $x = 2$ 處極限存在

(5) $f(x)$ 在 $x = 2$ 處連續

11. 下列哪些函數的圖形與 $y = \frac{1}{2}x$ 的圖形恰交於一點？

(1) $y = \frac{|x|}{x}$

(2) $y = \frac{1}{x}$

(3) $y = -\sqrt{x}$

(4) $y = -x^2 + 4x$ ，其中 $2 \leq x \leq 5$

(5) $y = [x]$

三、填充題（占 35 分）

說明：第 12 題至第 18 題，每題 5 分。

12. 已知 a, b 為實數且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 6n - 2}{bn + 8} = 3$ ，則數對 $(a, b) = \mathbf{【 \quad \quad \quad 】}$ 。

13. 設 $g(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$ ，若 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是連續函數，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

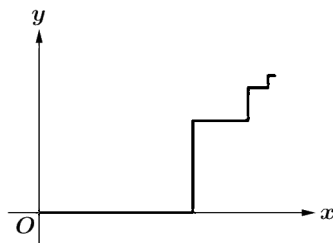
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 8^n}{2^{3n+2} + 5^{n+1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 設 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{2}$ ，試求 $a - b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. $[\]$ 為高斯符號，試求 $\sum_{k=1}^{25} [\log_2 k] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 一盒子裡有 n ($n > 3$) 顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n - 3$ 顆白球。從盒子裡隨機抽取 1 球，取後放回，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、 n 分及 1 分。若重複抽取 2 次所得分數的期望值為 E_n ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. 如圖，某人由原點 $O(0, 0)$ 出發，向右走 1 單位後，向上走 $\frac{3}{5}$ 單位，再向右走 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 單位，再向上走 $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ 單位，如圖所示一直走下去，每次都是移動前次距離的 $\frac{3}{5}$ ，假設最後收斂到點 $P(X, Y)$ ，求 $Y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



四、計算題（占 10 分）

說明：第 19 題至第 20 題，每題 5 分。

19. 試求函數 $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 4x + 7}$ 的值域。

20. 已知 $f(x) = (x-9)^2(x-11)^2 + 3x$ ，試證明：至少有一實數 c ，使得 $f(c) = 30$ 。

参考答案

1. 4 2. 5 3. 1 4. 5 5. 4
6. 1234 7. 35 8. 125 9. 2345 10. 13 11. 345
12. (0, 2)
13. (3, 2)
14. $\frac{1}{4}$
15. 10
16. 74
17. 10
18. $\frac{15}{16}$
19. $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\}$
20. 略