

未正確劃記班級、姓名、座號於答案卡者，一律扣 10 分!!

一、單一選擇題：(共 12 分，每題 6 分)

1. 設兩向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 滿足 $\vec{a} + \vec{b} = (7, -4)$ 、 $\vec{a} - \vec{b} = (-1, 2)$ ，則 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 所張出的平行四邊形面積為下列哪一個選項？(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5。

2. 已知兩向量 $\vec{a} = (8, 9)$ 、 $\vec{b} = (-6, 4)$ 。下列選項中，哪一個向量在 $\vec{b}$ 上的正射影向量長度最長？

- (1) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 (2) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
 (3) $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
 (4) $\frac{1}{7}\vec{a} + \frac{6}{7}\vec{b}$
 (5) $\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$ 。

二、多重選擇題：(共 40 分，各題全對得 8 分，答錯一個選項得 6 分，錯兩個選項得 4 分，錯三個選項得 2 分，其餘情形得 0 分)

3. 已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 為兩個非零向量，其夾角為 120° ，又 $\vec{a}$ 與 $\vec{a} + \vec{b}$ 垂直，請選出正確的選項。

- (1) $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$
 (2) $\vec{b}$ 與 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夾角大小無法確定
 (3) $\vec{b}$ 與 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夾角為鈍角，且大於 120°
 (4) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$
 (5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ 與 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 的夾角為銳角。

4. 坐標平面上，設 $M(100, 200)$ 為圓 C 的圓心， L 為圓 C 的一條切線。已知原點為 L 上一點且在圓 C 的外部。若向量 $(-1, 6)$ 為 L 的方向向量，則從原點出發沿下列選項中的哪一個向量不斷前進必定會經過圓 C 的內部？

- (1) $(3, 4)$
 (2) $(5, 3)$
 (3) $(7, 2)$
 (4) $(9, 1)$
 (5) $(1, 0)$ 。

5. 坐標平面上，有一 $\triangle OAB$ ，其三頂點坐標 $O(0,0)$ 、 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ 。另有三點 $P(p_1, p_2)$ 、 $Q(q_1, q_2)$ 、

$R(r_1, r_2)$ 滿足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{7}\overrightarrow{OB}$ 。請選出正確的選項。

- (1) P 、 Q 、 R 三點共線 (2) P 、 Q 、 R 三點恰有一個在 $\triangle OAB$ 的外部
 (3) $\triangle OAP$ 的面積、 $\triangle OAQ$ 的面積、 $\triangle OAR$ 的面積此三個值可適當排序使其形成等差數列
 (4) $\triangle OAP$ 的面積、 $\triangle OAQ$ 的面積、 $\triangle OAR$ 的面積此三個值可適當排序使其形成等比數列

(5) 設三個二元一次聯立方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1x + b_1y = q_1 \\ a_2x + b_2y = q_2 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} a_1x + b_1y = r_1 \\ a_2x + b_2y = r_2 \end{cases}$

的解分別為 (x_p, y_p) 、 (x_q, y_q) 、 (x_r, y_r) ，則 y_p, y_q, y_r 依序成等差數列。

6. 平面上，給定三點 O 、 A 、 B 滿足 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 垂直。設 P 、 Q 兩點滿足 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OA} + 6\overrightarrow{OB}$

且 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 垂直，請選出正確的選項。

- (1) O 點到直線 PQ 的距離為 O 點到直線 AB 的距離的 4 倍
 (2) $\triangle PAB$ 的面積等於 $\triangle QAB$ 的面積
 (3) $\triangle OPQ$ 面積為 $\triangle OAB$ 面積的 15 倍

(4) $|\overrightarrow{OA}| = 3|\overrightarrow{OB}|$

(5) $|\overrightarrow{OP}| < |\overrightarrow{OQ}|$ 。

7. 坐標平面上，有一正三角形 ABC ，設點 P 滿足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ， Q 為 P 點關於直線 AB 的對稱點

且 $\overrightarrow{AQ} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ 。請選出正確的選項。

(1) 若 $\overrightarrow{AB} = (6, 0)$ ，則 $\overrightarrow{AC} = (3, 3\sqrt{3})$

(2) 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，則 $|\overrightarrow{AG}| < |\overrightarrow{AP}|$

(3) $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}| = |\overrightarrow{AB}|$

(4) r 必為 $\frac{1}{2}$

(5) s 必為 $-\frac{1}{3}$ 。

三、選填題：(共 48 分，每格 6 分)

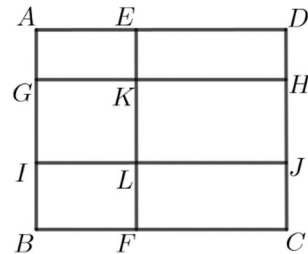
A. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 9$ ， $\overline{CA} = 11$ 。設 M 為 $\overline{CA}$ 中點，則內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \underline{89}$ 。

B. 平面上，已知兩直線 $L_1: 2x+3y=\sqrt{5}$ 與 $L_2: 2x-3y=\sqrt{7}$ 。設 θ 為 L_1 與 L_2 的其中一個交角，

則 $\sin \theta = \frac{\textcircled{10}\textcircled{11}}{\textcircled{12}\textcircled{13}}$ 。(化為最簡分數)

C. 如右圖，若矩形 $ABCD$ 被 $\overline{EF}$ 、 $\overline{GH}$ 、 $\overline{IJ}$ 三線段分割為六個小矩形，且 $\overline{AG}:\overline{GI}:\overline{IB}=3:5:4$ 。

若 $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EK} = 48$ ，則內積 $\left(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{LJ}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \underline{\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。



D. 設 $\overrightarrow{a} = (-8, 16)$ 、 $\overrightarrow{b} = (4, 7)$ ，已知 $p+q=1$ ，則 $\left|p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}\right|^2$ 的最小值為 $\textcircled{17}\textcircled{18}$ 。

E. 設 a 為實數，且方程組 $\begin{cases} 3x+(a-2)y=7a+34 \\ (a+5)x-2y=-5a-18 \end{cases}$ 有無限多組解，則所有解數對 (x, y) 中，
 $x^2 - 2y^2$ 的最小值為 $\textcircled{19}\textcircled{20}$ 。

F. 平面上，已知兩向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角為 30° 、 $|\overrightarrow{OA}|=2$ 、 $|\overrightarrow{OB}|=1$ 。令 Ω 為滿足 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $-1 \leq x \leq a$ 、 $-1 \leq y \leq b$ ，且 $4a^2 + b^2 = 32$ 。則當 Ω 的周長有最大值時，此時 Ω 的面積為 $\textcircled{21}\textcircled{22}$ 。

G. 平面上，有一個四邊形 $ABCD$ 內接於圓 Γ ，且 $\overline{AC}$ 為圓 Γ 的直徑、 O 點為圓 Γ 的圓心。已知 $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ 、

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -38$ ，且 ΔOAB 的面積： ΔOAD 的面積 $= 9:10$ 。設 $\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}$ ，則數對 $(r, s) = \left(\frac{\textcircled{23}\textcircled{24}}{\textcircled{25}}, \frac{\textcircled{26}\textcircled{27}}{\textcircled{28}}\right)$ 。
(化為最簡分數)

H. 設 ΔABC 的外心為 O ，若 $5\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{CA} + 8\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ，則 $\cos A$ 的最小值為 $\frac{\sqrt{29}}{\textcircled{30}}$ 。(化為最簡根式)

試題結束

1. (5) 2. (4) 3. (1)(3) 4. (1)(2) 5. (1)(4)(5) 6. (2)(3)(4) 7. (2)(5)

A. 26 B. $\frac{12}{13}$ C. -24 D. 64 E. -4 F. 15 G. $\left(\frac{25}{6}, \frac{15}{4}\right)$ H. $\frac{\sqrt{6}}{5}$