

臺中市立臺中第一高級中等學校試場規則：

十二、答案卷（卡）應書寫正確之座號、姓名並正確劃記，違者該科扣 10 分。

第壹部分、選擇（填）題（占 82 分）

一、單選題（占 10 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1. 下列級數何者收斂？

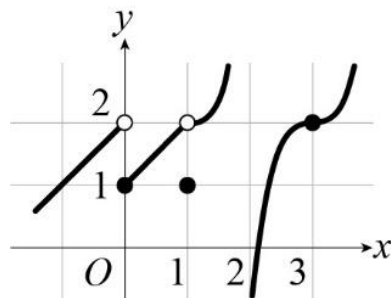
$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{101}{100}\right)^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{50} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+100}}{5^n} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+100}}{5^n} \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

2. 已知函數 $f(x)$ 的圖形如圖，選出正確的選項。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$(5) f(1) = f(3)$$



二、多選題（占 30 分）

說明：第 3 題至第 7 題，每題 6 分。每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯 3 個選項以上或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 下列有關極限的運算，哪些選項是對的？

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^3} = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0 \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020^n + 2021^n + 2022^n}{2023^n} = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \right) = 0 \quad (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{9 \cdot 2023^n + 9 \cdot 10^5} = 2023$$

4. 已知實數數列 $\{a_n\}$ 之前 n 項和 $S_n = n^2 - n + 1$ ， n 為正整數，試選出正確的選項。

$$(1) a_2 = 2 \quad (2) a_4 = 8 \quad (3) \{a_n\} \text{ 為等比數列}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{20} a_n = S_{20} = 381 \quad (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$$

5. 設 $f(x)$ 為實函數，其中 a 為實數，試選出正確的選項。

$$(1) \text{若 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 存在，則 } a \text{ 屬於 } f(x) \text{ 之定義域}$$

$$(2) \text{若 } f(a) \text{ 有意義，則 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$(3) \text{若 } f(x) = \tan x, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$(4) \text{若 } f(x) \text{ 為一多項式函數，則 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$(5) \text{若 } f(x) \text{ 為一多項式函數，且滿足 } f(-1)f(1) < 0, \text{ 則 } f(x) = 0 \text{ 在 } -1 \text{ 與 } 1 \text{ 之間至少有一個實根}$$

6. 試選出極限值存在的選項。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + |x|}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x}, \text{ 其中 } [] \text{ 為高斯符號，滿足 } x - 1 < [x] \leq x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+3)^{100} - 1}{x+2} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

背面尚有試題

7. 假設兩地之間的通話費，第一個半分鐘是 6 元，之後每半分鐘是 3 元，不滿半分鐘以半分鐘計算，設 t 分鐘的通話費為 $C(t)$ 。試問下列哪些選項是正確的？_____
- 說明： $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，例如： $[3.5]=3$ ， $[-3.1]=-4$ ， $[-5]=-5$ 等。
- (1) $C(t)$ 公式可表示為 $C(t)=6-3[1-2t]$
 - (2) $C(t)$ 公式可表示為 $C(t)=6-3[1-t]$
 - (3) 若本次通話 10 分鐘，則的通話費是 63 元
 - (4) 在 $t \geq 0$ 時， $[1-2t]=-[2t-1]$ 恆成立
 - (5) 若要讓本月通話費不超過 300 元，則本月通話時間最高為 50 分鐘。

C. 函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，其中 $a、b、c、d$ 為實數，已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -2$ ，

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5$ ，則 $f(x)$ 被 $x-4$ 除的餘式為 ⑭⑮。

D. 試求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+4x^3+6x^2+5x+2}{x^3+1} = \frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。(化為最簡分數)

三、選填題（占 42 分）

說明：第 A 題至第 G 題，每題 6 分。每題須全部答對才給分，答錯不倒扣。

A. 求 $\sum_{k=1}^9 (3 \times 2^k + 1) =$ ⑧⑨⑩⑪

B. $f(x) = \begin{cases} -2x+11 & , x \geq 3 \\ x^2+ax+b & , 0 \leq x < 3 \\ x+2 & , x < 0 \end{cases}$ 是連續函數，則 $a =$ ⑫⑬。

E. 無窮等比級數 $\frac{3}{4} - \frac{9}{16} + \frac{27}{64} - \dots + (-1)^{n-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots$ 的前 n 項部分和為 S_n ，而且此級數

的和為 S 。若欲使 $|S - S_n| < \frac{1}{10000}$ 成立，則最小自然數 $n =$ ⑱⑲

(對數值： $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$)

還有下一張試題，請耐心作答

F. 令多項式 $3(x+1)^n$ 除以 $(3x-1)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n 。則極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n =$ ②0

G. 設 $a_n = \frac{n^3-1}{n^3+1}$ ， n 為正整數，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_n) =$ $\frac{\textcircled{21}}{\textcircled{22}}$ (化為最簡分數)

第貳部分、非選擇題（占 18 分）

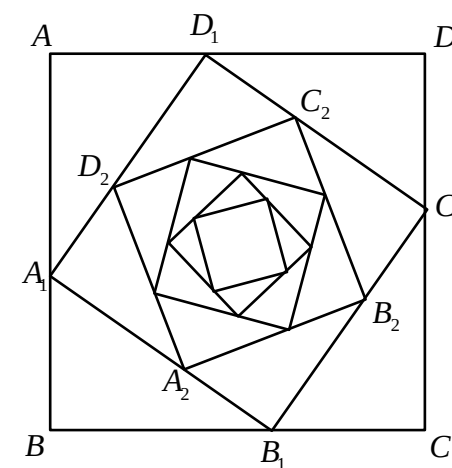
說明：本部分共有 2 題，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

1. 已知 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 8$ ， $g(x) = x^2 + x - 2$ 。

(1) 求證：在 2 與 3 之間至少有一實數 c ，使得 $f(c) = g(c)$ 。(5 分)

(2) 已知 $f(x) = g(x)$ 有三個實根，而且都不是整數。試問這三個根分別在哪兩個相鄰整數之間？(5 分)

2. 如圖， $ABCD$ 是邊長為 14 公分的正方形，在 $ABCD$ 各邊取點 A_1, B_1, C_1, D_1 ，使得 $\overline{AA_1} : \overline{A_1B} = \overline{BB_1} : \overline{B_1C} = \overline{CC_1} : \overline{C_1D} = \overline{DD_1} : \overline{D_1A} = 4:3$ ，可得一個內接正方形 $A_1B_1C_1D_1$ ，重複這樣的步驟會得到無窮多個內接正方形，其中 $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ 分別在 $\overline{A_nB_n}$ 、 $\overline{B_nC_n}$ 、 $\overline{C_nD_n}$ 、 $\overline{D_nA_n}$ 上，且滿足 $\overline{A_nA_{n+1}} : \overline{A_{n+1}B_n} = \overline{B_nB_{n+1}} : \overline{B_{n+1}C_n} = \overline{C_nC_{n+1}} : \overline{C_{n+1}D_n} = \overline{D_nD_{n+1}} : \overline{D_{n+1}A_n} = 4:3$ ，試求所有正方形面積的和為_____平方公分。(8 分)



試題結束

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

第貳部分、非選擇題（占 18 分）

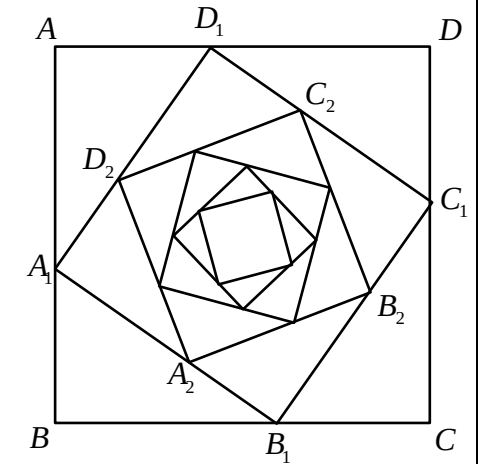
說明：本部分共有 2 題，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

1. 已知 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 8$ ， $g(x) = x^2 + x - 2$ 。

(1) 求證：在 2 與 3 之間至少有一實數 c ，使得 $f(c) = g(c)$ 。(5 分)

(2) 已知 $f(x) = g(x)$ 有三個實根，而且都不是整數。試問這三個根分別在哪兩個相鄰整數之間？(5 分)

2. 如圖， $ABCD$ 是邊長為 14 公分的正方形，在 $ABCD$ 各邊取點 A_1, B_1, C_1, D_1 ，使得 $\overline{AA_1} : \overline{A_1B} = \overline{BB_1} : \overline{B_1C} = \overline{CC_1} : \overline{C_1D} = \overline{DD_1} : \overline{D_1A} = 4:3$ ，可得一個內接正方形 $A_1B_1C_1D_1$ ，重複這樣的步驟會得到無窮多個內接正方形，其中 $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ 分別在 $\overline{A_nB_n}$ 、 $\overline{B_nC_n}$ 、 $\overline{C_nD_n}$ 、 $\overline{D_nA_n}$ 上，且滿足 $\overline{A_nA_{n+1}} : \overline{A_{n+1}B_n} = \overline{B_nB_{n+1}} : \overline{B_{n+1}C_n} = \overline{C_nC_{n+1}} : \overline{C_{n+1}D_n} = \overline{D_nD_{n+1}} : \overline{D_{n+1}A_n} = 4:3$ ，試求所有正方形面積的和為_____平方公分。(8 分)



市立臺中一中 112 學年度第一學期第一次期中考 高三數學甲 參考答案

臺中市立臺中第一高級中等學校試場規則：

十二、答案卷（卡）應書寫正確之座號、姓名並正確劃記，違者該科扣 10 分。

第壹部分、選擇（填）題（占 82 分）

一、單選題（占 10 分）（每題 5 分）

1. 【4】 2. 【3】

二、多選題（占 30 分）（全對得 6 分，錯 1 個得 4 分，錯 2 個得 2 分）

3. 【235】 4. 【145】 5. 【45】 6. 【34】 7. 【13】

三、選填題（占 42 分）（每題 6 分）

A. 【3075】 B. 【-2】 C. 【16】 D. 【 $\frac{1}{3}$ 】 E. 【30】 F. 【3】 G. 【 $\frac{2}{3}$ 】

第貳部分、非選擇題（占 18 分）

說明：本部分共有 2 題，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。
非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

1. 已知 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 8$ ， $g(x) = x^2 + x - 2$ 。

(1) 求證：在 2 與 3 之間至少有一實數 c ，使得 $f(c) = g(c)$ 。(5 分)

(2) 已知 $f(x) = g(x)$ 有三個實根，而且都不是整數。試問這三個根分別在哪兩個相鄰整數之間？(5 分)

Ans：(1) 略；(2) $(-2, -1)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(2, 3)$

2. 如圖， $ABCD$ 是邊長為 14 公分的正方形，在 $ABCD$ 各邊取點 A_1, B_1, C_1, D_1 ，使得 $\overline{AA_1} : \overline{A_1B} = \overline{BB_1} : \overline{B_1C} = \overline{CC_1} : \overline{C_1D} = \overline{DD_1} : \overline{D_1A} = 4:3$ ，可得一個內接正方形 $A_1B_1C_1D_1$ ，重複這樣的步驟會得到無窮多個內接正方形，其中 A_{n+1} 、 B_{n+1} 、 C_{n+1} 、 D_{n+1} 分別在 $\overline{A_nB_n}$ 、 $\overline{B_nC_n}$ 、 $\overline{C_nD_n}$ 、 $\overline{D_nA_n}$ 上，且滿足 $\overline{A_nA_{n+1}} : \overline{A_{n+1}B_n} = \overline{B_nB_{n+1}} : \overline{B_{n+1}C_n} = \overline{C_nC_{n+1}} : \overline{C_{n+1}D_n} = \overline{D_nD_{n+1}} : \overline{D_{n+1}A_n} = 4:3$ ，試求所有正方形面積的和為_____平方公分。(8 分)

Ans： $\frac{2401}{6}$

