

台北市成功高中 112 上高二第二次期中考

一、多選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 7 分。(7-4-1-0)

1. 設 $a \in \mathbb{R}$ ， $a \neq 1$ 且 $a \neq 0$ ，關於函數 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$ ，選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 皆有意義
- (2) $g(x)$ 有意義的條件為 $a > 0$
- (3) 在 $f(x)$ 與 $g(x)$ 有意義的條件下， $f(x)$ 與 $g(x)$ 對稱 $x = y$
- (4) $f(x)$ 的圖形必為凹向上
- (5) $g(x)$ 的圖形必為凹向上

2. 下列個數對的運算，哪些是正確的？

- (1) $\log_2 9 = \log_2 3$
- (2) $\log_{2023}(-2) + \log_{2023}(-5) = \log_{2023} 10$
- (3) $\log_7 70 = 1 + \log_7 2 + \log_7 5$
- (4) $\log_{10} 100 = 10$
- (5) $3^{\log_3 2} = 2$

3. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ，若 $a = 3^{25}$ ， $b = 5^{17}$ ，則下列哪些正確？

- (1) $a + b$ 為 12 位數
- (2) $a + b$ 的最高位數字為 1
- (3) a 的個位數字為 3
- (4) $\frac{1}{b}$ 小數點後第 12 位不為 0
- (5) $2b$ 為 12 位數

4. 現今房價居高不下，當利率越低時，投資客便會利用低的利率與寬限期購入房子，再進行轉售或者承租，購取差價或者以承租的租金來支付房貸。以及買賣房屋若經由仲介，一但成交，房仲將會收取 6% 左右的手續費，當房子一手轉過一手，房價必然會層層墊高。成功集團政府決定利用下列方式來

調整，若利率與房價之間的函數為 $f(x) = 1000 \left(1 + \frac{1}{20} \log \left(\frac{1}{x^3} \right) \right)$ ，其中銀行貸款利率為 $x\%$ 且 $x > 0$ ，

$f(x)$ 為原房價 1000 萬元因利率變化而形成之房價起伏，試問下列敘述何者正確？

- (1) $f(x)$ 為遞減函數
- (2) 在本題的函數之下，利率與房價為負相關
- (3) 無論房價多少，都可以找到對應的利率
- (4) 若希望原來 1000 萬元的房價降成 900 萬元以下，則利率至少要升至 4% 以上
- (5) $x = f(x)$ 無解

5. 設 $0 < a < b < 1$ ，令 $p = \sqrt{\log_{\frac{1}{7}} a + \log_{\frac{1}{7}} b}$ ， $q = \frac{1}{2} \left(\log_{\frac{1}{7}} a + \log_{\frac{1}{7}} b \right)$ ， $r = \log_{\frac{1}{7}} \frac{a+b}{2}$ ，則下列敘述何者正確？

- (1) $q = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{ab}$
- (2) $q = p$
- (3) $p \geq q > r$
- (4) $r \geq q > p$
- (5) $p \geq r > q$

二、填充題（占 65 分）

說明：第 6 題至第 17 題，每格 5 分。

6. 設 x 為實數，若 $f(x) = 3 \cdot (3^{2x} + 3^{-2x}) - 10 \cdot (3^x + 3^{-x}) + 6$ ，

試求 $f(x)$ 的最小值為【 】。

7. 若 $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 \leq 0$ ，則 x 的範圍為【 】。

8. 已知 $\log_2 3 = m$ ， $\log_3 7 = n$ ，試以 m ， n 表示 $\log_{42} 63 =$ 【 】。

9. 若方程式 $(\log 2x)(\log 5x) = 2023$ 之二根為 α ， β ，則求 $\log \alpha\beta =$ 【 】。

10. 若 $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2(\log_5 x)) \geq 0$ ，則 x 的範圍為【 】。

11. 直線 L 過 $P(-5, 4)$ 且與 $x - y = 0$ 垂直。若 L 與 $f(x) = 3^x$ 的圖形交於 A ，與 $g(x) = \log_3 x$ 的圖形交於 B ，則 $\overline{PA} + \overline{PB} =$ 【 】。

12. 方程式 $x^{2+\log_3 x} = 81x^2$ 之解為【 】。

13. 兩圖形 $y = x^2$ 與 $y = 2^{|x|}$ 有【 】個交點。

14. 設 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$, 則 a , b , c 的大小為【 】。

15. 以巴戰爭烽火無情地展開，聲音的強度是測量每平方公尺音波的功率（單位： W/m^2 ， W 為瓦特），若飛彈的聲音強度為 $I(W/m^2)$ ，將它算成分貝 d 表示時，公式為 $d(I) = 20 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ ，其中 $I_0 = 10^{-8} (W/m^2)$ ，則：

(1) 1 枚彈道飛彈的聲音強度為 $10^{-3} (W/m^2)$ ，
試問此聲音強度所產生的噪音為【 】分貝。

(2) 若有 100 枚分貝為 60 的巡弋飛彈與 20 枚的彈道飛彈同時發射，請問測的音量【 】分貝。(四捨五入至整數位)

$$(\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 7 \approx 0.8451)$$

16. 化簡 $\sqrt{\log_6 18 + \sqrt{\log_6 81}} + \sqrt{\log_6 18 - \sqrt{\log_6 81}}$ 之值為【 】。

17. 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 6)$ ，在 $3 \leq x \leq 7$ 範圍內之最大值為【 】。

参考答案

1. 3 2. 35 3. 234 4. 1234 5. 13

6. -8

7. $x \leq 2$

8. $\frac{mn + 2m}{1 + m + mn}$

9. -1

10. $5 < x \leq 25$

11. $9\sqrt{2}$

12. $9, \frac{1}{9}$

13. 4

14. $a = c > b$

15. (1) 100 ; (2) 126

16. 2

17. -1