

高雄市高雄中學 112 上高三第一次期中考

一、多選題

說明：第 1 題至第 3 題。

1. z 是 $3 + 4i$ 的三次方根，則 z 的幅角可能為第幾象限角？

- (1) 第一象限角
- (2) 第二象限角
- (3) 第三象限角
- (4) 第四象限角
- (5) 象限角

2. 下列各無窮數列中，哪些是收斂數列？

(1) $\langle (-1)^n \rangle$

(2) $\left\langle \left(\frac{10^6 - 1}{10^6 + 1} \right)^n \right\rangle$

(3) $\left\langle \frac{4^{n+3}}{5^{n-4}} \right\rangle$

(4) $\left\langle \frac{9^n}{8^{n-2}} \right\rangle$

(5) $\left\langle \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3n + 1} \right\rangle$

3. 下列各敘述何者正確？

(1) $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 為二數列，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ 都存在，

$$\text{則 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - b_n^2) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)^2$$

(2) $\langle a_n \rangle, \langle x_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 為三實數數列且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 都存在，

若對所有正整數 n ，恆滿足 $a_n \leq x_n \leq b_n$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(3) $\langle a_n \rangle$ 為一數列，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ 存在，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 亦存在

(4) 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(5) $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收斂級數

二、填充題

說明：第 4 題至第 16 題。

4. 設 $z = (1 + 2i)^3$ ，求 $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 試求 $\text{Arg} \left(\frac{(\cos 343^\circ + i \sin 163^\circ)^6 (\sin 83^\circ + i \cos 83^\circ)^5}{\cos 13^\circ - i \sin 13^\circ} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 解方程式 $|z|^2 + z^2 = 8 - 4i$

7. $A = \left\{ z \mid z = r(\cos \theta + i \sin \theta), 0 \leq r \leq 2, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$ 為複數平面上的區域，令

$D = \{w \mid w = z^3, z \in A\}$ ，試求區域 D 的面積？ $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 若 z 為複數，且滿足 $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ ，則 $z^{112} + \frac{1}{z^{112}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. z 為虛數，已知 $z + \bar{z} = z \cdot \bar{z}$ ，且 z 和 3 都是方程式 $x^3 + px^2 + qx - 6 = 0$ 之根，其中 p, q 為實數。求

(1) 數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 z 的虛部小於 0 ，求 $z = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 設兩複數 α, β 在複數平面上所對應之點分別為 A, B ，點 O 表原點，

若 $\beta^2 - 4\alpha\beta + 16\alpha^2 = 0$ 且 $|\alpha - \beta| = \sqrt{13}$ ，則 $\triangle OAB$ 面積為【 】。

11. 設無窮等比級數的首項為 $0.1\overline{25}$ ，第二項為 $0.0\overline{4}$ ，則此級數之和為【 】。

12. 求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt{n^2 + 1} - n - \frac{1}{2n} \right) =$ 【 】。

13. x, y 為實數，複數 $z = x + yi$ ，若 $\frac{iz - 2}{z - 2i}$ 是實數，求 $x^2 + y^2 =$ 【 】。

14. 求無窮級數 $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \cdots$ 之和
= $\left[\quad \quad \right]$ 。

15. $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$ ，已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，

試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 之值 =【 】。

16. 複數平面上，正三角形 ABC 的外接圓圓心是原點 O 、外接圓半徑為 $\sqrt[3]{2}$ ；其中

A 點表示的複數之輻角為 $\frac{\pi}{9}$ 。 $P(-2)$ 在實軸上，試求 $\overline{PA} \times \overline{PB} \times \overline{PC}$ 之值 =【 】。

三、計算證明題

說明：第 17 題。

17. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ ，試證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} = e$

参考答案

1. 123 2. 235 3. 14

4. $-11 + 2i$

5. 150°

6. $2 - i, -2 + i$

7. 48π

8. 2

9. (1) $(-5, 8)$; (2) $1 - i$

10. $\sqrt{3}$

11. $\frac{961}{4950}$

12. $-\frac{1}{8}$

13. 4

14. $\frac{1}{4}$

15. 2

16. $2\sqrt{21}$

17. 略