

台南市台南一中 112 上高三第一次期中考

一、填充題（占 70 分）

說明：第 1 題至第 10 題，每格 5 分。

1. 求極限值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-4}{x-3} + \frac{2}{x^2-4x+3} \right) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^{112} - 1}{x} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n+2}}{3^{n-2} + 4^{n-1}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+4}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^{3n} + 3^{2n}} = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$2. \text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 5x + 3| + a}{x - 2} = b, \text{ 則數對 } (a, b) \text{ 為【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$3. \text{ 設 } f(x) = \begin{cases} -2x + 11 & , x \geq 3 \\ x^2 + ax + b & , 0 \leq x < 3 \\ x + 2 & , x < 0 \end{cases} \text{ 為連續函數，則數對 } (a, b) \text{ 為【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$4. \text{ 設 } x \text{ 為一正實數且滿足 } x \log x = \log 2023, \text{ 若 } x \text{ 落在連續正整數 } k \text{ 與 } k+1 \text{ 之間，則 } k = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

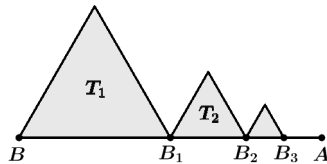
$$5. \text{ 設 } f(x) = \frac{(x+1)^3(x-2)}{x^2+2}, \text{ 則 } f'(2) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

$$6. \text{ 若三次多項式 } f(x) \text{ 滿足 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -5, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 7, \text{ 則 } f'(3) = \text{【 } \quad \quad \quad \text{】}$$

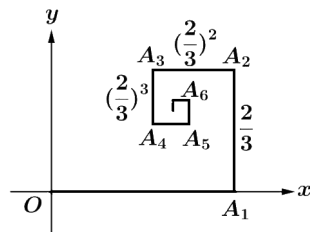
7. 若 $(x-1)^2$ 為 $f(x) = (x^3 - x - 1)^{10} + ax^2 + bx + 1$ 之因式，則數對 $(a, b) =$ 【 】

8. 若直線 $x - y + 1 = 0$ 與 $\Gamma: y = x^3 + x^2$ 相切，則切點坐標為【 】

9. 如圖，已知 $\overline{AB} = 12$ ，取 $\overline{AB}$ 的中點 B_1 ，以 $\overline{BB_1}$ 為邊長作正三角形 T_1 。再取 $\overline{B_1A}$ 的中點 B_2 ，以 $\overline{B_1B_2}$ 為邊長作正三角形 T_2 。如此不斷重複這些步驟，可以得到無窮多個正三角形，則所有正三角形的面積和為【 】



10. 如圖， $\overline{OA_1} = 1$ ， $\overline{A_1A_2} = \frac{2}{3}$ ， $\overline{A_2A_3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ， $\overline{A_3A_4} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ， $\dots$ ，如此繼續進行，若 A_n 之坐標為 (x_n, y_n) ，當 $n \rightarrow \infty$ 時，則 A_n 之坐標為【 】



二、多選題（占 16 分）

說明：第 11 題至第 12 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

11. 下列各函數何者在 $x = 0$ 處可微分？(選項中，高斯記號 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數)

(1) $f(x) = |x|$

(2) $f(x) = x|x|$

(3) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$

(4) $f(x) = x[x]$

(5) $f(x) = [x - \sqrt{2}]$

12. 下列各函數極限值何者正確？(選項中，高斯記號 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{112^n} = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1} \right) = 0$

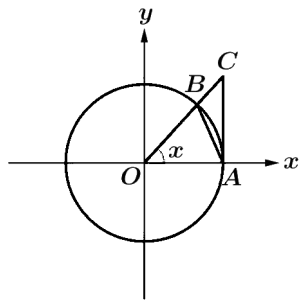
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 0$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

三、計算證明題（占 14 分）

說明：第 13 題至第 14 題。

13. 引導式證明



(1) 利用右圖之單位圓 (半徑為 1)，線段 AC 與圓相切於 A 點，

證明：當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時， $\sin x < x < \tan x$ (3 分)

(2) 承上，證明：當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時， $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (2 分)

(3) 承上，證明：當 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 時， $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (3 分)

(4) 承上，證明： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (2 分)

14. 利用 13 題的結果，計算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ 之值。

參考答案

1.(1) $\frac{1}{2}$; (2) 224 ; (3) 8 ; (4) $\sqrt{2}$; (5) 9

2. $(-3, 1)$

3. $(-2, 2)$

4. 4

5. $\frac{9}{2}$

6. 31

7. $(22, -24)$

8. $(-1, 0)$

9. $12\sqrt{3}$

10. $\left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$

11. 25

12. 15

13. 略

14. 2