

# 台中市文華高中 112 上高二期末考

## 一、單選題（占 15 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 5 分。

1. 設向量  $\vec{a} = (4, -3)$ ,  $\vec{b} = (2, -1)$ ,  $\vec{c} = (t, 8)$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$ , 則下列選項何者錯誤?

(1)  $|\vec{b}| = \sqrt{5}$

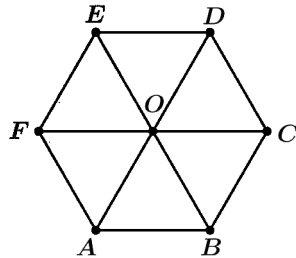
(2)  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  夾銳角

(3) 若  $\vec{b} \parallel \vec{c}$ , 則  $t = -16$

(4) 與向量  $\vec{a}$  垂直, 且長度為 3 的向量為  $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$

(5) 若  $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{c}$ , 則  $t = 8$

2. 如圖,  $O$  點為正六邊形的中心, 試問下列選項中哪一個向量之中點之終點會落在  $\triangle OEF$  的內部 (不含邊界)?



(1)  $\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$

(2)  $\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$

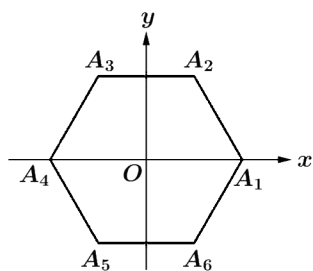
(3)  $\frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OB}$

(4)  $-\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$

(5)  $-\frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OB}$

3. 如圖， $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  為坐標平面上邊長為 1 的正六邊形，原點  $O$  為此正六邊形的中心，則

$$\left| \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_1A_6} \right| = ?$$



- (1) 0
- (2) 2
- (3) 4
- (4) 6
- (5)  $4\sqrt{3}$

## 二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

4. 設  $\vec{a} = (p, q)$ ， $\vec{b} = (r, s)$  為兩非零向量，其中  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ ，則下列哪些條件可說明  $\vec{a} // \vec{b}$ ？

- (1)  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
- (2)  $|113\vec{a} + 2024\vec{b}| = 0$
- (3) 存在  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，使得  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$
- (4)  $2\vec{a} - 3\vec{b} = (4, 4)$ ， $-\vec{a} + 2\vec{b} = (-3, -3)$
- (5)  $(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr + qs)^2$

5. 已知平面上有三個非零向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 若  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，則  $\vec{a} = \vec{b}$
- (2) 若  $\vec{a} // \vec{b}$  且  $\vec{a} \perp \vec{c}$ ，則  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$
- (3) 若  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  的正射影為  $\vec{c}$ ，則  $\vec{a}$  在  $-2\vec{b}$  的正射影為  $-2\vec{c}$
- (4) 若  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，則  $\vec{a} \perp \vec{b}$
- (5) 若  $|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}| = |(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})|$

6. 已知聯立方程組  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  (其中  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a_1^2 + b_1^2 \neq 0$

,  $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ), 若  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ , 向量  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2)$

, 則下列關於聯立方程組的幾何意義與向量觀點的敘述哪些選項是正確的?

(1) 若此聯立方程式有解, 則  $\Delta \neq 0$

(2) 若  $\Delta = 0$ , 則  $\vec{c}$  無法表示成  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的線性組合

(3) 若找得到實數  $x, y$  使得  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , 則表示  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  恰有一組解

(4) 若方程組  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  的解為  $(3, 1)$ ,

則  $\begin{cases} 4c_1x + 5b_1y + 3a_1 = 0 \\ 4c_2x + 5b_2y + 3a_2 = 0 \end{cases}$  的解為  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{5})$

(5) 若此方程組恰有一組解  $(x_0, y_0)$ , 且  $\vec{b}$  與  $\vec{c}$  所決定的平行四邊形面積  $= 3 \times (\vec{a}$  與  $\vec{b}$  所決定的平行四邊形面積), 則  $x_0 = 3$

7. 設  $A(1, 0)$ 、 $B(2, \sqrt{3})$ 、 $C$  為坐標平面上三點, 其中  $\overrightarrow{AC} = (3, -3\sqrt{3})$  且  $P$  點滿足  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ , 則下列敘述哪些正確?

(1)  $\triangle ABC$  面積為  $6\sqrt{3}$

(2) 若  $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3} \leq y \leq 7$ , 則  $P$  點所形成區域面積為  $60\sqrt{3}$

(3) 由  $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  與  $\sqrt{3}\overrightarrow{AB} - 2\sqrt{3}\overrightarrow{AC}$  所展出的平行四邊形區域面積為 54

(4) 若  $P, A, B$  三點共線, 則  $\overline{PB} : \overline{PC} = y : x$

(5) 若  $\overrightarrow{AP}$  平分  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$  的夾角, 則  $x : y = 3 : 1$

8. 設  $\triangle ABC$  滿足  $\overline{AB} = 1$ ,  $\overline{AC} = 2$ ,  $\overline{BC} = \sqrt{6}$ ,  $\triangle ABC$  之外接圓  $\Gamma$  的圓心為  $O$ , 直線  $\overrightarrow{AO}$  交  $\Gamma$  於點  $P (\neq A)$ , 直線  $\overrightarrow{AP}$  與直線  $\overrightarrow{BC}$  交於點  $D$ , 已知  $\overrightarrow{AP} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$ , 試選出正確的選項:

(1)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$

(2)  $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

(3)  $\triangle ABD$  面積 :  $\triangle PCD$  面積 = 5 : 12

(4)  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

(5)  $|\overrightarrow{AD}| = \frac{8}{7}$

### 三、填充題 (占 45 分)

說明：第 9 題至第 17 題，每題 5 分。

9. 設  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  為平面上兩向量，其中  $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ ,  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , 且  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的夾角為  $135^\circ$ , 試求

$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

10. 等腰梯形  $ABCD$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ,  $\overline{CD} = 4$ ,  $\overline{AD} = \overline{BC} = 8$ ,

其中  $M$ 、 $N$  分別在  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$  邊上, 且  $M$  為  $\overline{BC}$  中點,  $\overline{CN} = 3\overline{ND}$ ,

試求  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

11. 設  $\vec{a} = (3, 1)$ ,  $\vec{b} = (3, -4)$ ,  $\vec{c} = 2\vec{a} - t\vec{b}$ , 若  $t = p$  時,  $|\vec{c}|$  有最小值  $m$ ,

則  $p \times m = \text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

12. 坐標平面上, 一直線  $L$  的法向量平行向量  $(2, -1)$ ,  $A$  點在直線  $L$  上且  $B$  點在

直線  $L$  外,  $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ , 則點  $B$  到直線  $L$  的距離為  $\text{【 } \quad \quad \text{】}$ 。

13. 在  $\triangle ABC$  中，在  $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ ， $\overline{AB}$  上分別取  $D$ ， $E$ ， $F$  三點，使得

$2\overline{DC} = 3\overline{BD}$ ， $\overline{AC} = 3\overline{AE}$ ， $\overline{AB} = r\overline{AF}$ ，若  $G$  為  $\triangle DEF$  之重心且

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{11}{45}\overrightarrow{AC}，則實數  $r = \text{【 } \quad \quad \text{】}。$$$

14. 若  $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ ，且  $\begin{vmatrix} 118a & 2024a + 2b \\ 118c & 2024c + 2d \end{vmatrix} = p$ ，

$$\begin{vmatrix} a - 10b & 3a + 29b \\ c - 10d & 3c + 29d \end{vmatrix} = q，則  $\frac{q}{p} = \text{【 } \quad \quad \text{】}。$$$

15. 在  $\triangle ABC$  中，點  $D$  在  $\overline{AB}$  上且  $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 3$ ，點  $E$  在  $\overline{AC}$  上且  $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 5$ ，若  $\overline{CD}$  與  $\overline{BE}$  交於點  $P$ ，且  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AE}$ ，則  $x + y = \text{【 } \quad \quad \text{】}。$

16. 已知  $x, y$  為實數，且滿足  $2x^2 + 3y^2 = 7$ ，試求  $2x - 3y$  的最大值 =  $\text{【 } \quad \quad \text{】}。$

17. 若平面上  $O$  為原點，且點  $P(a, b), Q(c, d)$  分別在兩圓  $C_1 : x^2 + y^2 = 1$  及  $C_2 : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$  上，則  $ac + bd$  的最大值為  $\text{【 } \quad \quad \text{】}。$

参考答案

1. 4 2. 3 3. 4

4. 1245 5. 24 6. 4 7. 25 8. 234

9. 2

10. 74

11.  $\frac{12}{5}$

12.  $2\sqrt{5}$

13.  $\frac{5}{2}$

14.  $\frac{1}{4}$

15.  $\frac{46}{31}$

16.  $\sqrt{35}$

17.  $\sqrt{35}$