

# 112 學年度第一學期第三次定期考高三數甲試題

## 命題範圍：第三章積分

### 一、單選題（占 54 分）

第 1 到 9 題劃記在答案卡所標記的列號（1—9），每題答對得 6 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項，該題得 0 分。

1. 定積分  $\int_0^1 4x^4(x^5+1)^3 dx$  之值為下列哪一個選項？

- (1)  $\frac{16}{5}$  (2) 16 (3) 15 (4) 3 (5) 1

2. 兩函數  $f(x) = x$  與  $g(x) = \frac{1}{4}x^3$  的圖形所圍成的封閉區域面積為下列哪一個選項？ (1) 4 (2) 2 (3) 1 (4)  $\frac{1}{2}$  (5) 8

3. 設  $f(x) = x^2 + 1$ ，令  $R$  表示由曲線  $y = f(x)$  與  $x$  軸、 $x = 0$  及  $x = 4$  所圍成的封閉區域，若將區間  $[0, 4]$  分成  $n$  等分，即將區域  $R$  分割成  $n$  個長條，令此  $n$  個長條之上矩形面積和（上和）為  $U_n$ ，下矩形面積和（下和）為  $L_n$ ，欲使  $U_n$  與  $L_n$  的差小於 0.001，則  $n$  的最小值為下列哪一個選項？

- (1) 64001 (2) 6401 (3) 68001 (4) 6801 (5) 16001

4. 由曲線  $y = x^2$  與  $y = \sqrt{x}$  所圍成的封閉區域繞  $x$  軸所得的旋轉體體積為下列哪一個選項？ (1)  $\frac{4}{5}\pi$  (2)  $\frac{3}{10}\pi$  (3)  $\frac{1}{2}\pi$  (4)  $\frac{3}{5}\pi$  (5)  $\frac{2}{5}\pi$

5. 設  $G(x) = \int_a^{x^2} (2t^3 + 5t^2 - 3t + 1)dt$ ，其中  $a$  為常數，則  $G'(1)$  的值為下列哪一個選項？ (1) 15 (2) 14 (3) 10 (4) 5 (5) 1

6. 設  $\alpha, \beta$  為兩相異實數，則  $\frac{1}{(\alpha - \beta)^5} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)^3 dx$  的值為下列哪一個選項？ (1) 給的條件不足，無法求值 (2) 共有三個可能的值 (3)  $\frac{1}{5}$   
(4)  $\frac{1}{4}$  (5)  $\frac{1}{20}$

7. 設  $0 \leq a \leq 2$ ，則  $\int_0^2 (x|x-a|)dx$  的最小值為下列哪一個選項？

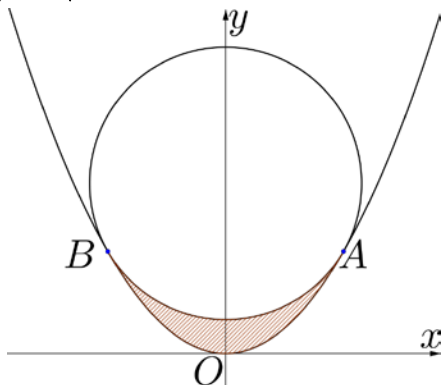
- (1)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (3) 1 (4)  $\frac{8-2\sqrt{2}}{3}$  (5)  $\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

8. 已知  $R$  是以點  $(0, 2)$  為圓心，半徑為 1 的上半圓弧與  $x$  軸、 $x = -1$  及  $x = 1$  所圍成的封閉區域，則  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積為下列哪一個選項？（這個旋轉體形狀像月餅）

- (1)  $8\pi^2$  (2)  $4\pi^2$  (3)  $\frac{56}{3}\pi + 4\pi^2$  (4)  $\frac{28}{3}\pi + 2\pi^2$  (5)  $\frac{28}{3}\pi + \pi^2$

9. 有一圓心坐標為  $(0, 5)$ ，半徑為 4 的圓，已知此圓與拋物線  $y = \frac{1}{4}x^2$  的圖形只交於  $A$ 、 $B$  兩點，如下圖所示，則圓外與拋物線所圍的斜線區域之面積為下列哪一個選項？

- (1)  $12\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi$  (2)  $6\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$  (3)  $36\sqrt{3} - 16\pi$  (4)  $24\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi$   
(5)  $20\sqrt{3} - 16\pi$



## 二、多選題（占 16 分）

第 10 到 11 題劃記在答案卡所標記的列號（10—11），每題有 5 個選項，至少有一個是正確或最適當的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對得 8 分；答錯 1 個選項得 5 分；答錯 2 個選項得 2 分；答錯多於 2 個選項或該題未作答得 0 分。

10. 設  $f(x)$  為三次實係數多項式， $y = f(x)$  的圖形通過  $(0, 0)$ ， $(1, 0)$ ， $(2, 0)$  三點，

且  $\int_0^1 f(x)dx = a$ ， $\int_0^2 f(x)dx = b$ ，並已知  $a < b$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  的領導係數大於零  
(2)  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸所圍成的封閉區域面積為  $b - 2a$

(3)  $y = f(x)$  的圖形在其反曲點的切線斜率為負

(4)  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$

(5)  $\int_{-1}^0 |f(x)| dx = \int_2^3 |f(x)| dx$  .

11. 下列敘述，請選出正確的選項。

(1) 設  $f(x)$  為連續函數，若  $\int_a^b f(x) \geq 0$ ，則  $f(x) \geq 0$ ，其中  $a \leq x \leq b$

(2) 設函數  $f(x)$  與  $g(x)$  均為定義在閉區間  $[a, b]$  上的連續函數，而且  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  都成立； $R$  表示由  $y = f(x)$  的圖形， $y = g(x)$  的圖形，直線  $x = a$  及  $x = b$  所圍成之封閉區域，將區域  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積為  $\int_a^b \pi (f(x) - g(x))^2 dx$

(3) 若多項式函數  $F(x)$  和  $G(x)$  都是  $f(x)$  的反導函數，則  $\frac{F(x) + G(x)}{2}$  是  $f(x)$  的反導函數

(4)  $\int_{-1}^0 x^2 (1+x^4)(1+x^6) dx = \int_0^1 x^2 (1+x^4)(1+x^6) dx$

(5)  $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1} dx > \frac{6}{7}$

### 三、選填題（占 30 分）

須依各題的答案格式填答於答案卡上，答案卡上的每一個列號只能在一個格子劃記。例如，

若答案格式是  $\frac{\textcircled{48}\textcircled{49}}{\textcircled{50}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $-\frac{3}{4}$ ，則考生必須分別在答案卡的第 48、

49、50 列劃記如下：

|    |                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|----|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 48 | 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        | 8                        | 9                        | 0                        | -                                   | ±                        |
|    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 49 | 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        | 8                        | 9                        | 0                        | -                                   | ±                        |
|    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |
| 50 | 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        | 8                        | 9                        | 0                        | -                                   | ±                        |
|    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> |

第 A 到 E 題劃記在答案卡所標記的列號（12—26），每題完全答對得 6 分；未作答或未完全答對得 0 分。

A. 設  $f(x) = x(x+1)^2(x-1)$ ，若  $a, b$  為滿足  $a < b$  的任意實數，則  $\int_a^b f(x)dx$  的最小值為  $\frac{\textcircled{12}\textcircled{13}\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。(化成最簡分數)

B. 若拋物線  $y = 2x - x^2$  與直線  $y = mx$  所圍成的封閉區域的面積為 1，其中  $0 < m < 2$ ，則  $m$  的值為  $\textcircled{17} - \sqrt[3]{\textcircled{18}}$ 。

C. 設  $f(x) = x^3 + \int_0^1 x^2 f(t)dt$ ，則  $f(4)$  的值為  $\textcircled{19}\textcircled{20}$ 。

D. 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \{ [2^2 + 1] + [(2 + \frac{2}{n})^2 + 1] + [(2 + \frac{4}{n})^2 + 1] + \cdots + [(2 + \frac{2n-2}{n})^2 + 1] \}$  的值為  $\textcircled{21}\textcircled{22}$ 。

E. 設二次多項式  $f(x) = x^2 + ax + b$ ，其中  $a, b$  為常數，若對於任意一次函數

$$g(x) \text{ 恆滿足 } \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx = 0,$$

$$\text{則 } a = \underline{\textcircled{23}}, \quad b = \underline{\frac{\textcircled{24}\textcircled{25}}{\textcircled{26}}}. \quad (\text{化成最簡分數})$$