

北一女中一百一十二學年度第一學期第一次段考高三文組(仁愛信)數學科試題

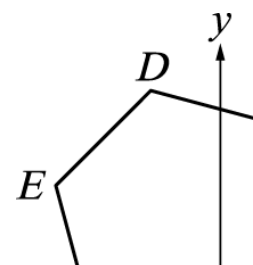
一、多重選擇題：每題 10 分，共 30 分。每個選項獨立計分，判斷正確者得 2 分，判斷錯誤者得 0 分。
整題未答者，不計分。



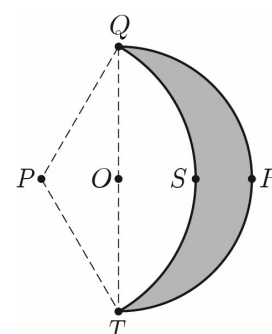
- 設 $f(x)$ 是實係數三次多項式，且 $f(3+\sqrt{2}i)=0$ ，則下列敘述何者正確？ (A) $f(x)=0$ 恰有一實根
(B) $3-\sqrt{2}i$ 為 $f(x)=0$ 的一根 (C) $x^2-6x+11$ 是 $f(x)$ 的因式 (D) 沒有實數 x 滿足 $f(x^5)=0$
(E) 若 $f(1)<0$ 且 $f(2)>0$ ，則 $f(3)>0$ 且領導係數為正的。
- 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ ，請選出正確的選項？ (A) $\omega^5=1$ (B) $\omega^{31}=\omega$ (C) ω^3 是 $x^5=1$ 的一個根
(D) 在複數平面標示 $\omega^6, \omega^7, \omega^8, \omega^9$ 時，這 4 個複數依序落在第一、第二、第三、第四象限內
(E) $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ 是 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的根。
- 已知 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ 且 $\cos \theta < 0$ ，請問下列哪些選項是正確的？
(A) $\tan \theta < 0$ (B) $\tan^2 \theta > \frac{4}{9}$ (C) $\sin^2 \theta > \cos^2 \theta$ (D) $\sin 2\theta > 0$
(E) 標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限。

二、填充題：每格 5 分，14 格共 70 分。答案若為分數，請務必以最簡分數填寫之。

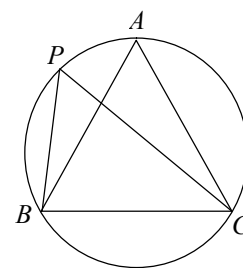
- 已知 $i=\sqrt{-1}$ ，試求 $\frac{112}{i^{112}} + \frac{113}{i^{113}} + \frac{114}{i^{114}} + \frac{115}{i^{115}} =$ 。
- 設 a, b 為實數，若 $\frac{1+ai}{b+i} = 1-i$ ，則數對 $(a, b) =$ 。
- 試求 $2\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) - 4 =$ 。
- 已知 a 為實數且 $x^2+(a+i)x+(3+i)=0$ 有實根，則此方程式的解為 。
- 如右圖，在正六邊形 $ABCDEF$ 中，已知 A 點在原點，且 B 點坐標為 $(3, 3)$ ，
試求 E 點坐標為 。



- 將方程式 $z^8=1$ 的六個虛根在複數平面上描點，則以這六個點為頂點之凸六邊形面積為 。
- 已知方程式 $x^2-x-6=0$ 的兩根為 α, β ，若方程式 $x^2+ax+b=0$ 的兩根為 $\frac{6}{\alpha^3-6\alpha-6}$ 和 $\frac{6}{\beta^3-6\beta-6}$ ，
則數對 $(a, b) =$ 。
- 設計師為天文館設計以不銹鋼片製成的月亮形狀，其中有一款設計圖如下圖所示：圖中圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、 QT 為直徑的半圓， $QT=4\sqrt{3}$ 。圓弧 QST 的圓心在 P 點， $PQ=PT=4$ 。圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的灰色區域 $QRTSQ$ 面積為 $a\pi + b\sqrt{3}$ ，其中 π 為圓周率， a 為最簡有理數， b 為整數，則數對 $(a, b) =$ 。



9. 如右圖， $\triangle ABC$ 為一正三角形且其外接圓上一點 P ，已知 $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ ，則 $\overline{BP} + \overline{CP}$ 的最大值
= _____。



10. $\triangle ABC$ 為邊長為 13 的正三角形， P 點在三角形內部，若線段長度 $\overline{PB} = 12$ 且 $\overline{PC} = 5$ ，則 $\cos \angle ABP$
= _____。

11. 已知平面上直角 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 2$ 、 $\overline{BC} = \sqrt{5}$ 。若分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為底邊在 $\triangle ABC$ 的外部作頂角等於 120° 的等腰三角形 $\triangle MAB$ 與 $\triangle NAC$ ，則 $\overline{MN}^2 =$ _____。

12. 若 $y = 7^x$ 與 $y = 8 - x$ 相交於點 $A(\alpha, 8 - \alpha)$ ， $y = \log_7 x$ 與 $y = 8 - x$ 相交於點 $B(\beta, 8 - \beta)$ ，則 $\alpha + \beta$
= _____。

13. 在坐標平面上， Γ 是邊長為 8 的正方形，其中心位在點 $(1, 1)$ ，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y = a \times 3^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為 _____。

14. 設 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是首項為 8、公比是 8 的等比數列。則 $\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \log_{a_3} a_4 + \log_{a_4} a_5$ 的值為 _____。

三、證明計算題：每小題 5 分，共 10 分。

已知 a, b, c, d 為整數，試證明下列性質：

(1) $|(a+bi)(c+di)|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ 。

- (2) 若 p 能寫成兩整數的平方和， q 能寫成兩整數的平方和，
則 pq 也能寫成兩整數的平方和。(提示：利用(1)的結果)

北一女中一百一十二學年度第一學期第一次段考高三文組(仁愛信)數學科試題

答案卷(學生)

高三_____班_____號 姓名_____

一、多重選擇題：每題 10 分，共 30 分。每個選項獨立計分，判斷正確者得 2 分，判斷錯誤者得 0 分。
整題未答者，不計分。

1.	2.	3.
----	----	----

二、填充題：每格 5 分，14 格共 70 分。答案若為分數，請務必以最簡分數填寫之。

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.
11.	12.	13.	14.	

三、證明計算題：每小題 5 分，共 10 分。

已知 a, b, c, d 為整數，試證明下列性質：

(1) $|(a+bi)(c+di)|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ 。

(2) 若 p 能寫成兩整數的平方和， q 能寫成兩整數的平方和，
則 pq 也能寫成兩整數的平方和。(提示：利用(1)的結果)

答案卷(教師)

高三____班____號 姓名____

一、多重選擇題：每題 10 分，共 30 分。每個選項獨立計分，判斷正確者得 2 分，判斷錯誤者得 0 分。
整題未答者，不計分。

1. ABCE	2. ABCDE	3. ABE
----------------	-----------------	---------------

二、填充題：每格 5 分，14 格共 70 分。答案若為分數，請務必以最簡分數填寫之。

1. $-2+2i$	2. $(1, 0)$	3. $-4+\sqrt{3}i$	4. $-1, -3-i$	5. $(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$
6. $\sqrt{2}+1$	7. $(1, -6)$	8. $(\frac{2}{3}, 4)$	9. $8\sqrt{3}$	10. $\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$
11. $\frac{9+2\sqrt{15}}{3}$ (或 $3+\frac{2\sqrt{15}}{3}$)	12. 8	13. $-81 \leq a \leq 135$	14. $\frac{73}{12}$ (或 $6\frac{1}{12}$)	

三、證明計算題：每小題 5 分，共 10 分。

已知 a, b, c, d 為整數，試證明下列性質：

(1) $|(a+bi)(c+di)|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ 。

(2) 若 p 能寫成兩整數的平方和， q 能寫成兩整數的平方和，
則 pq 也能寫成兩整數的平方和。(提示：利用(1)的結果)