

112 學年度第一學期第三次定期考高二數 A 試題

命題範圍：平面向量的表示法、平面向量的內積、

面積與二階行列式、二元一次聯立方程式

一、單選題（占 36 分）（每題答對得 6 分）

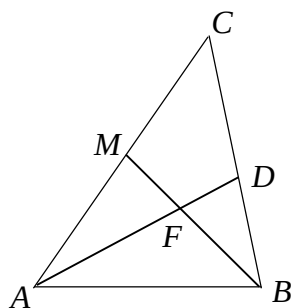
◎ 圖 1 的 $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{AC}=3$ ， D 點在 $\overline{BC}$ 上使得 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ， M 是 $\overline{AC}$ 的中點。依此條件回答 1、2 題。

1. 設 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，其中 x, y 是實數，則 x 的值等於

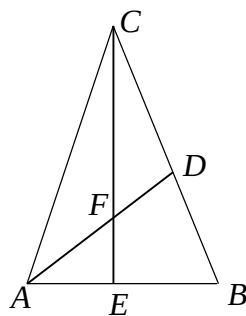
- (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{4}{7}$ (4) $\frac{3}{7}$ (5) $\frac{4}{9}$

2. 若 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BM}$ 的交點為 F ，設 $\overrightarrow{CF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ，其中 α, β 是實數，則 α 的值等於

- (1) $\frac{6}{11}$ (2) $\frac{5}{11}$ (3) $\frac{4}{9}$ (4) $\frac{4}{7}$ (5) $\frac{3}{7}$



(圖 1)



(圖 2)

◎ 圖 2 的 $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{AC}=3$ 、 $\overline{BC}=\sqrt{11}$ ， D 點在 $\overline{BC}$ 上使得

$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ， E 點在 $\overline{AB}$ 上使得 $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ 。依此條件回答 3、4、5 題。

3. 內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值等於 (1) 6 (2) $\sqrt{11}$ (3) 3 (4) 1 (5) $\frac{1}{2}$

4. 設 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 F 點，若 $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，其中 α, β 是實數，則 α 的值等於

- (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{3}{14}$ (4) $\frac{1}{4}$ (5) $\frac{2}{7}$

5. 內積 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值等於

- (1) $\frac{-14}{3}$ (2) $\frac{-35}{8}$ (3) $\frac{-35}{4}$ (4) $\frac{-7}{4}$ (5) $\frac{-7}{2}$

◎ $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\cos(\angle BAC) = \frac{3}{5}$ ，設 H 點在 $\overline{BC}$ 上，使得 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 。依此條件回答第 6 題。

6. 設 $\overrightarrow{AH}$ 可表示成 $\alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，其中 α, β 是實數，則 α 的值等於

- (1) $\frac{7}{11}$ (2) $\frac{9}{13}$ (3) $\frac{11}{15}$ (4) $\frac{13}{17}$ (5) $\frac{15}{19}$

二、多重選擇題（占 24 分）

7. 右圖中每個小三角形（如 $\triangle OAB$ ）均為邊長 1

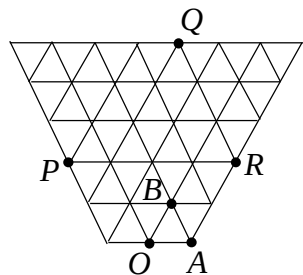
的正三角形，設 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 。請選出下列正確的選項。

(1) $\overrightarrow{PQ} = \vec{a} + 3\vec{b}$ (2) $\overrightarrow{PQ}$ 的長度等於 $\sqrt{10}$

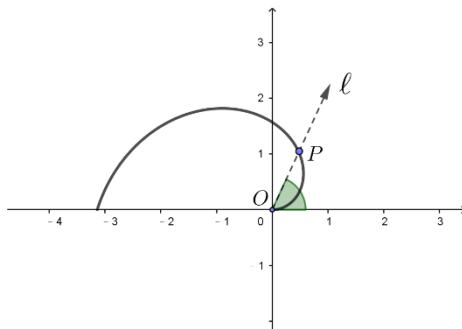
(3) $\overrightarrow{PR}$ 與 $\overrightarrow{PQ}$ 的內積等於 4

(4) 設 $\overrightarrow{OR} = \alpha \overrightarrow{OP} + \beta \overrightarrow{OQ}$ ，其中 α, β 是實數，則 $\alpha = \frac{-8}{11}$

(5) 設 $\overrightarrow{OR} = \alpha \overrightarrow{OP} + \beta \overrightarrow{OQ}$ ，其中 α, β 是實數，則 $\beta = \frac{8}{11}$



8. 射線 ℓ 一開始的起點是原點 O 、方向是 x 軸正方向，一質點從原點朝射線方向以每秒 1 單位的速度等速前進。但當質點移動的同時， ℓ 以原點為中心、每秒逆時鐘方向轉 1（徑）的方式等速旋轉，右圖是 P 點從 $0 \sim \pi$ 秒的軌跡曲線（經 π 秒後，質點距離原點 π 單



位、射線方向轉至 x 軸負方向)。設在 t 秒時 P 點的位置向量為 $\overrightarrow{OP}$ ，請選出下列正確的選項。

(1) 在 $0 \sim \pi$ 秒之間， $|\overrightarrow{OP}| = t$

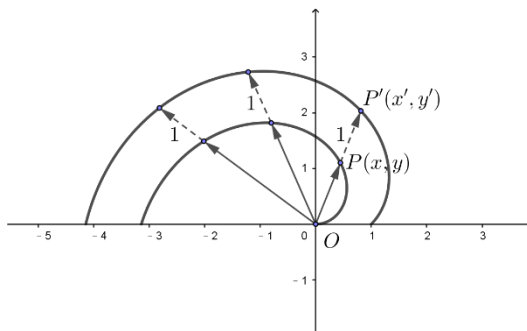
(2) 在 $0 \sim \pi$ 秒之間， $\overrightarrow{OP}$ 與 x 軸正方向的夾角為 t （徑）

(3) $\pi \sim 2\pi$ 秒的軌跡曲線與 $0 \sim \pi$ 秒的軌跡曲線對稱 x 軸

(4) 若質點朝射線方向移動的速度改為每秒 2 單位，且 ℓ 的轉速

改為每秒轉 2（徑），則 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 秒的軌跡曲線與原來的軌跡曲線相同

(5) 如右圖，將原來 $0 \sim \pi$ 秒軌跡曲線上每一點的位置向量向外延長 1 單位，設 t 秒時新的位置向量為 (x', y') ，則 $x' = (t+1) \cos(t)$ 、 $y' = (t+1) \sin(t)$ 。



9. 坐標平面上三點 $A(11,16)$ 、 $B(14,-9)$ 、 $C(17,10)$ ， O 為原點。設不全為零的實數 x, y, z 滿足 $x+y+z=1$ 使得 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ 。

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 代表二階行列式，請選出下列正確的選項。

$$(1) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 10 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 14 & 17 \\ -9 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 10 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 14 \\ 16 & -9 \end{vmatrix}}$$

$$(2) \quad \Delta ABC \text{ 面積等於 } \frac{1}{2} \times \left(\begin{vmatrix} 14 & 17 \\ -9 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 10 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & 14 \\ 16 & -9 \end{vmatrix} \right)$$

$$(3) \quad z = \frac{\Delta OAB \text{ 面積}}{\Delta ABC \text{ 面積}}$$

(4) 設 $\overline{OC}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點為 D ，若 $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA} + \ell\overrightarrow{OB}$ ，其中 k, ℓ 是實

$$\text{數，則 } k : \ell = \begin{vmatrix} 14 & 17 \\ -9 & 10 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 10 & 16 \end{vmatrix}$$

(5) 設 P 點坐標為 $(1, 2)$ ，若 $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$

(其中 $\alpha + \beta + \gamma = 1$)，則 $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ 。

三、選填題（占 28 分）

A. 坐標平面上，甲由點 $(1, -4)$ 出發，每分鐘移動 $\vec{\ell}_1 = (-1, a)$ 的方式等速直線前進（其中 a 為實數）；而在甲出發的同時，乙由點 $(-7, -12)$ 出發，每分鐘移動 $\vec{\ell}_2 = (b, 2)$ 的方式等速直線前進（其中 b 為實數）。若

甲、乙兩人相遇在 x 軸上，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 、 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（須用最簡分數表示）

B. 設平面上三點 $A(2, 1)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(9, 0)$ ，若平面上 P 點滿足 $\overrightarrow{AP} =$

$x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ 其中 $x \geq -1$ 、 $y \geq -1$ 且 $x + y \leq 1$ ，則 P 點所形成區域的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

C. 設四邊形 $ABCD$ 中， $A(0,0)$ ， $B(5,12)$ ， $D(-4,3)$ 、 $\angle BAC = \angle CAD$ ，
已知 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E 點，且 $\angle AEB = \theta$ ，則 $\cos \theta =$ _____。

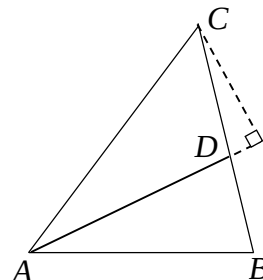
D. 如右示意圖， $\triangle ABC$ 滿足 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、

$\cos(\angle BAC) = \frac{3}{5}$ ，設 D 點在 $\overline{BC}$ 上使得 $\overline{AD}$

平分 $\angle BAC$ ，若 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的正射影

向量可表示成 $\alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，其中 α, β 是

實數，則 $\alpha =$ _____、 $\beta =$ _____。(須用最簡分數表示)



四、混合題（占 12 分）

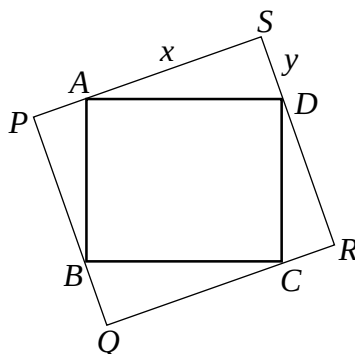
第一題：

如圖，固定邊長的長方形 $ABCD$ 內接於邊

長未定的長方形 $PQRS$ 中，已知 $\overline{AB} = 3$ 、

$\overline{AD} = 5$ 。假設 $\overline{AS} = x$ 、 $\overline{SD} = y$ ，其中

$0 < x < 5$ 、 $0 < y < 5$ ，試問



(1) 若長方形 $PQRS$ 的周長可表示成

$k(x+y)$ ，其中 k 是固定實數，則 $k =$ _____（須用最簡分數表示）。(3 分)

(2) 長方形 $PQRS$ 周長的最大值等於 _____。(3 分)

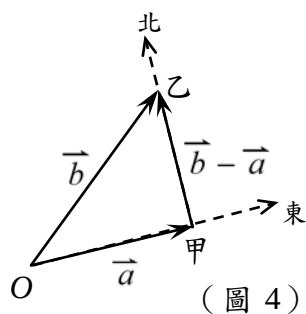
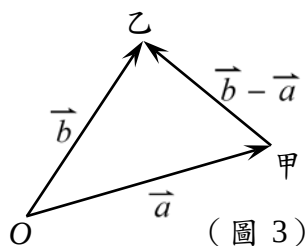
第二題：

平面上的相對速度如下圖 3 所示，甲、乙兩船同時從原點 O 出發，

甲以每小時行駛 $\vec{a}$ 等速直線前進、乙以每小時行駛 $\vec{b}$ 等速直線前進；

若甲船上的觀測者認為自己是靜止不動，則他觀察乙船是以每小時

$\vec{b} - \vec{a}$ 的速度直線前進。



上述平面的相對速度中，當甲船向正東方航行，若甲船上的觀測者認為自己是靜止，且觀察乙船始終朝著正北方航行，則此時 $\vec{b} - \vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 垂直。(如上圖 4)

在 $x-y$ 坐標平面的原點上有甲、乙、丙三艘船同時出發，分別以每小時行駛 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 的速度等速直線航行，其中 $\vec{a} = (2, -10)$ 、

$\vec{b} = (12, 5)$ 、且 $\vec{c}$ 的方向是正東方（注意：此坐標平面 x 軸的正方向並非正東方）。若丙船上的觀測者認為自己是靜止，且發覺甲船一直是朝著正南方行駛、乙船一直是朝著正北方行駛，則 $\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（6 分）