

市立臺中一中 112 學年度第 2 學期期末考高一數學科試題 科目代碼：03

一、單選題 (每題 6 分，共 18 分。)

1. () 設 θ 是一個廣義角，以下(a)~(i)的敘述中，有幾個是正確的？

(a) $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

(b) $-1 \leq \tan \theta \leq 1$

(c) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$

(d) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

(e) $\cos(-\theta) = -\cos \theta$

(f) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(g) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 時， $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

(h) $0^\circ \leq \theta < 45^\circ$ 時， $\cos \theta > \sin \theta$

(1) 3 個 (2) 4 個 (3) 5 個 (4) 6 個 (5) 7 個

2. () 串串公司規定員工在一星期(七天)當中選擇 2 天休假，若小隆、小諺兩人均隨機選擇休假日且兩人的選擇互不相關，則一星期當中發生兩人在同一天休假的機率為何？

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{8}{21}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{10}{21}$ (5) $\frac{11}{21}$

3. () 桌遊社社長決定在期末社團成發時，擺攤進行「硬幣遊戲」，遊戲規則如下：

顧客和社長各有一個硬幣，選擇硬幣的正面或反面並同時亮出來(即自行決定出現正面或反面的機率)，如果都是選正面社長要給顧客 3 元，如果都是選反面則社長要給顧客 1 元，一人選正面一人選反面則顧客要給社長 2 元。

顧客小諺決定要試玩這個遊戲，並且決定亮出正面的機率為 $\frac{1}{5}$ ，則社長亮出正面的機率

至少要大於多少，才會讓社長所得金額的期望值為正？

(1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{2}{7}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{4}{5}$ (5) $\frac{6}{7}$

二、多選題 (每題 10 分，共 30 分。只答錯 1 個選項得 6 分，只答錯 2 個選項給 2 分，答錯 3 個以上選項不給分。)

4. () 如右圖，有一個 $\frac{1}{4}$ 圓，半徑為 1，圓心為 O ， $\overline{OA}$ 為半徑， B 在圓弧上， C 、 D 在

射線 $\overline{OB}$ 上，且 $\overline{OE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{AD}$ 都垂直半徑 $\overline{OA}$ ， $\overline{EC} \parallel \overline{OA}$ 。

設 $\angle AOB = \theta$ ，下列哪些選項的值與 $\cos \theta$ 相等？

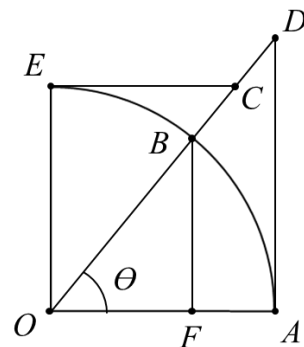
(1) $\overline{OF}$

(2) $\frac{\overline{CE}}{\overline{OE}}$

(3) $\frac{1}{\overline{AD}}$

(4) $\frac{1}{\overline{OC}}$

(5) $\frac{1}{\overline{OD}}$



5. () 已知 $\cos \theta = \frac{5}{13}$ ， $\tan \theta < 0$ ，下列有關於廣義角三角比的選項，何者正確？

(1) $\tan \theta = -\frac{12}{5}$

(2) $\sin \theta = -\frac{12}{13}$

(3) $\sin(90^\circ + \theta) = -\frac{5}{13}$

(4) $\cos(360^\circ - \theta) = \frac{5}{13}$

(5) $\sin(180^\circ + \theta) = \frac{12}{13}$

6. () 在 $\triangle ABC$ 中，令 $a = \overline{BC}$ 、 $b = \overline{CA}$ 、 $c = \overline{AB}$ ，則下列敘述何者正確？

(1) 若 $\sin A = \frac{1}{2}$ ，則 $\angle A = 30^\circ$ 。

(2) 若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ ，則 $\angle C$ 為直角。

(3) 若 $\cos A < 0$ ，則 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形。

(4) 若 $a \cos A = b \cos B$ ，則 $\triangle ABC$ 為等腰三角形。

(5) 若 $(a+b+c)(a-b+c) = 3ac$ ，則 $\angle B = 60^\circ$ 。

三、選填題 I (每題 7 分，共 42 分。)

A. 小諺任意寫出一個三位正整數，其百位數字、十位數字與個位數字依序形成一個等差數列的機率

為 $\frac{(\quad)}{(\quad)*}$ 。

B. 有兩個公正的六面骰子，其中一個骰子的六個面分別編號 1 至 6，另一個骰子的六個面分別編號 7 至 12。今同時擲這兩個骰子一次，分別出現點數 a 與點數 b ，則 $|a-b|$ 的期望值為 $\underline{\quad}$ 。

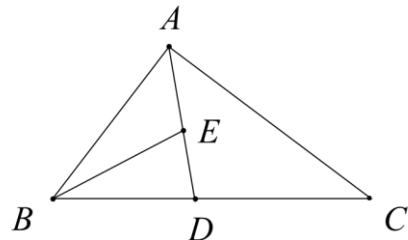
C. 求 $\sin^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cos^2 4^\circ + \cdots + \sin^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ = \underline{\quad}$ 。(一位小數)

D. 平面上，若直角坐標系與極坐標系的原點重合，且極軸恰為 x 軸正向時，已知 P 點的直角坐標為 $(3\sin 260^\circ, 3\cos 260^\circ)$ ，則 P 點的極坐標為 $\underline{[1, 012^\circ]}$ 。(角度請以最小正同界角表示)

E. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=12$ 、 $\overline{BC}=14$ 、 $\overline{CA}=16$ ，

$\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的分角線， E 為 $\overline{AD}$ 中點，如右圖所示。

試求 $\overline{BE}$ 長為 $\underline{3\sqrt{4}}$ 。



F. 一手龍 在 30 公尺的樹頂，一指龍 在樹的正西方，一百龍 在樹的西 30° 南。

若 一手龍 從樹頂看向 一指龍 腳底點的俯角為 45° 、從樹頂看向 一百龍 腳底點的俯角為 60° ，

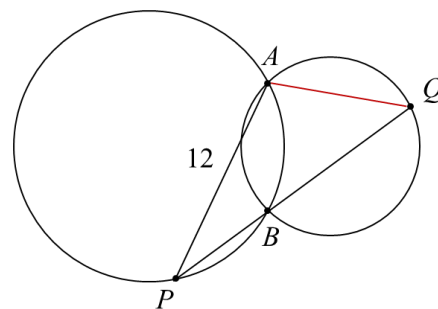
則 一指龍 與 一百龍 兩腳底點的距離為 $\underline{56\sqrt{7}}$ 公尺。

四、選填題 II (每題 5 分，共 10 分。)

G. 如右圖，大小兩圓交於 A 、 B 兩點，大圓半徑 8，小圓半徑 6。

在大圓上找一點 P ，連接 $\overline{PB}$ ，交小圓於 Q 。

若 $\overline{AP} = 12$ ，求 $\overline{AQ}$ 長為 8。



H. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 7$ 、 $\overline{AC} = 8$ 、 $\overline{AB}$ 長為正整數。

若 $\angle B$ 為銳角，求 $\triangle ABC$ 面積最大值為 $9\sqrt{3}$ 。

市立臺中一中 112 學年度第 2 學期高一期末考數學科參考答案

1. (4) 2. (5) 3. (2) 4. (1)(5) 5. (1)(2)(4)(5) 6. (2)(3)(5)

A. $\frac{1}{20}$ B. 6 C. 44.5 D. $[3, 190^\circ]$ E. $3\sqrt{6}$ F. $10\sqrt{3}$ G. 9 H. $2\sqrt{195}$

詳解：

1. (b) $-\infty < \tan \theta < \infty$ 、(e) $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ，所以正確敘述的有 6 個。選(4)

2. $\frac{C_2^2 + C_1^2 C_1^5}{C_2^7} = \frac{11}{21}$ ，選(5)。

3. $E(\text{社長}) = (-3) \times x \times \frac{1}{5} + (-1) \times \frac{4}{5} \times (1-x) + 2 \times \left[x \times \frac{4}{5} + (1-x) \times \frac{1}{5} \right] > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{7}$ ，選(2)。

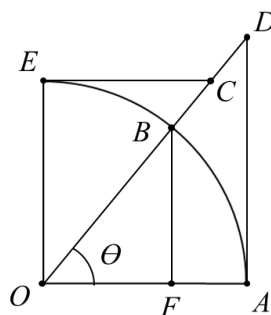
4. (1) $\overline{OF} = \overline{OB} \cos \theta = \cos \theta$

(2) $\frac{\overline{CE}}{\overline{OE}} = \tan \angle COE = \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$

(3) $\frac{1}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{OA} \tan \theta}$

(4) $\frac{1}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OC}} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$

(5) $\frac{1}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \cos \theta$ 選(1)(5)



5. $\cos \theta = \frac{5}{13}$ ， $\tan \theta < 0 \Rightarrow \sin \theta = -\frac{12}{13}$ 、 $\tan \theta = -\frac{12}{5}$

又 $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta = \frac{5}{13}$ 、 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta = \frac{5}{13}$ 、 $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta = \frac{12}{13}$

故選(1)(2)(4)(5)

6. (1) $\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 30^\circ$ 或 150°

(2) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \Rightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \angle C$ 為直角

(3) $\cos A < 0 \Rightarrow \angle A > 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ 為鈍角三角形

(4) $a \cos A = b \cos B \Rightarrow a \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow a^2 b^2 + a^2 c^2 - a^4 = a^2 b^2 + b^2 c^2 - b^4$

$\Rightarrow c^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) = 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0 \Rightarrow a = b$ 或 $c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow$ 等腰三角形或直角三角形

(5) $(a+b+c)(a-b+c) = 3ac \Rightarrow (a+c)^2 - b^2 = 3ac \Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac$

$\Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 60^\circ$ 故選(2)(3)(5)

A. 三位正整數有 100、101、...、999，共 900 個。

abc 成等差表示 $a+c=2b$ 必為偶數，故 a 、 c 之和為偶數。

1、3、5、7、9 可重覆選 2，共有 $5 \times 5 = 25$

0、2、4、6、8 可重覆選 2，但第一次不可選 0，共有 $4 \times 5 = 20$

故機率為 $\frac{25+20}{900} = \frac{1}{20}$ 。

B. 右表中，以主對角線為軸，位於對稱位置的兩數和為 12，

而每個值出現的機率皆為 $\frac{1}{36}$ ，故期望值為 $\frac{12 \times 18}{36} = 6$ 。

C. $\sin^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cos^2 4^\circ + \cdots + \sin^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$

$$= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ) + \cdots + (\cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ = 1 + 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{2} = 44.5$$

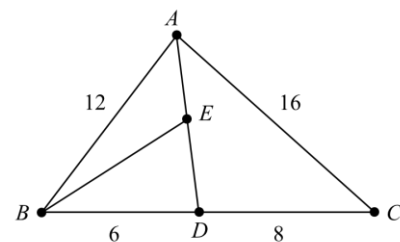
D. $r = \sqrt{(3\sin 260^\circ)^2 + (3\cos 260^\circ)^2} = 3$

θ 需滿足 $\begin{cases} \cos \theta = \sin 260^\circ < 0 \\ \sin \theta = \cos 260^\circ < 0 \end{cases}$ ，可得 $\theta = 450^\circ - 260^\circ = 190^\circ$ 故極坐標為 $[3, 190^\circ]$ 。

E. 如右圖，由內分比定理知 $\overline{BD}:\overline{CD} = 12:16 = 3:4 \Rightarrow \overline{BD} = 6$

$$\text{由餘弦定理知 } \overline{AD} = \sqrt{12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6 \times \frac{12^2 + 14^2 - 16^2}{2 \times 12 \times 6}} = 12$$

$$\text{再由中線上公式知 } 12^2 + 6^2 = 2(\overline{BE}^2 + 6^2) \Rightarrow \overline{BE}^2 = 54 \Rightarrow \overline{BE} = 3\sqrt{6}$$



F. 如右圖， $\overline{BC} = 30$ 、 $\overline{BD} = \frac{30}{\sqrt{3}}$

由餘弦定理知

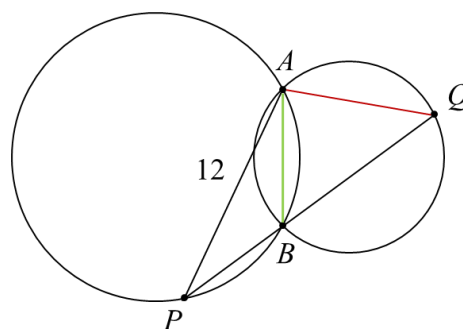
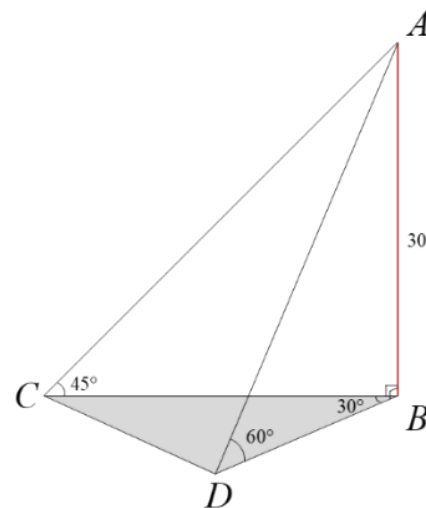
$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \sqrt{30^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \times 30 \times \frac{30}{\sqrt{3}} \times \cos 30^\circ} = 30 \sqrt{1 + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 30 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

G. 如右圖，連接 $\overline{AB}$ 。

$$\text{由正弦定理知，} \frac{12}{\sin \angle ABP} = 2R = 2 \times 8 \Rightarrow \sin \angle ABP = \frac{3}{4}$$

$$\text{又 } \frac{\overline{AQ}}{\sin \angle ABQ} = 2R' = 2 \times 6 = 12$$

$$\Rightarrow \overline{AQ} = 12 \times \sin \angle ABQ = 12 \times \sin \angle ABP = 12 \times \frac{3}{4} = 9$$



H. 如右圖， $\angle B$ 為銳角 $\Rightarrow 8^2 < x^2 + 7^2 \Rightarrow x^2 > 15 \Rightarrow x \geq 4$

又三角形任兩邊長和大於第三邊長 $\Rightarrow x < 7 + 8 = 15 \Rightarrow x \leq 14$

三角形面積最大發生在 $\overline{BC}$ 邊上的高最長時，即 $\angle C$ 最接近 90° 時，

所以 x 要接近 $\sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113} \approx 10.6$

當 $x=10$ 時， $\triangle ABC$ 面積 $= \sqrt{\frac{25}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{11}{2}} = \frac{15\sqrt{55}}{4}$

當 $x=11$ 時， $\triangle ABC$ 面積 $= \sqrt{13 \times 2 \times 5 \times 6} = 2\sqrt{195} > \frac{15\sqrt{55}}{4}$

所以 $\triangle ABC$ 面積最大值為 $2\sqrt{195}$

